

THÈSE DE DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ PARIS VI

SPÉCIALITÉ INFORMATIQUE

PRÉSENTÉE PAR PATRICIA RENAULT
POUR OBTENIR LE TITRE DE
DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ PARIS VI

MÉTHODES DE RÉDUCTION DE RÉSEAUX RC APPLIQUÉES AUX OUTILS DE VÉRIFICATION DE CIRCUITS SUBMICRONIQUES

SOUTENUE LE 22 DÉCEMBRE 2003, DEVANT LE JURY COMPOSÉ DE

M. CHRISTIAN PIGUET	RAPPORTEUR
M. ETIENNE SICARD	RAPPORTEUR
M. ALAIN GREINER	EXAMINATEUR
MME. ARMELLE HAEN	EXAMINATEUR
M. DAVIDE PANDINI	EXAMINATEUR
M. PIROUZ BAZARGAN-SABET	DIRECTEUR DE THÈSE

Résumé

Une étape importante du flot de conception des systèmes intégrés numériques VLSI est la phase de vérification après placement-routage. Cette vérification s'effectue sur une netlist extraite du dessin des masques de fabrication. Ce fichier contient la description de l'ensemble des éléments actifs du circuit mais aussi des éléments parasites tels que les résistances et capacités d'interconnexion. Pour fournir une estimation réaliste, un outil de vérification pour les technologies fortement submicroniques tel qu'un outil d'évaluation de bruit de diaphonie ou un outil d'analyse temporelle doit prendre en compte ces éléments parasites. Or, le volume de données nécessaires à la représentation de ces éléments et la complexité des phénomènes mis en jeu ne permettent pas l'intégration directe de ces éléments dans les algorithmes de vérification. La modélisation de ces phénomènes nécessite donc une simplification des réseaux de résistances et de capacités qui caractérisent les interconnexions.

La méthode que nous proposons est composée de deux phases. L'étape d'analyse permet d'obtenir l'expression de la tension des nœuds de sortie d'un réseau de résistances et de capacités en fonctions des nœuds d'entrée. Ensuite, lors de l'étape de réduction nous proposons un schéma simplifié qui représente une approximation satisfaisante du réseau tout en conservant la possibilité de s'intégrer aux algorithmes de vérification.

Deux méthodes d'analyse sont présentées. La première, dite directe, utilise une représentation du circuit dans le domaine temporel tandis que la seconde, dite indirecte, représente le circuit dans le domaine fréquentiel. Toutefois, ces deux méthodes passent par la résolution de matrices et la recherche des racines d'un polynôme. Nous proposons également une technique originale pour cette recherche.

L'étape de réduction modélise les réseaux par un schéma simplifié dont les paramètres sont déterminés à partir de l'expression des nœuds de sortie.

Un prototype logiciel utilisant les principes décrits dans cette thèse a été développé. Ce logiciel montre la précision du modèle choisi ainsi que le temps d'exécution nécessaire à l'analyse et à la réduction.

Mots clés

Outils de vérification VLSI, modélisation, réduction, résistances-capacités parasites, bruit de diaphonie

Abstract

Backend verifications represent an important part in the design flow of a digital system. These verifications are performed on a netlist resulted from the extraction of the layout. In the deep submicron technologies, this netlist contains the description of active elements, transistors, as well as passive elements such as parasitic interconnect resistance or capacitance. To provide a realistic estimation of electrical phenomena, backend verification tools such as timing analyser or crosstalk noise evaluation tool have to take into account these parasitic elements. However, the amount of data required to represent these elements and the complexity of the underlying phenomena make the integration of these elements hard if not impossible inside the verification algorithms. Thus, a simplified model is required to ease the verification.

Here, we propose a method to obtain a simplified but still accurate model to represent the interconnection wires. An interconnection wire is extracted as a network of resistor and capacitor possibly coupled to other wires through coupling capacitance.

The proposed method comprises two steps : Analysis and Reduction. During the analysis the time expression of the network's output is calculated. Two approaches are proposed. The direct approach works directly on the differential equations that characterize the network in the time domain. The indirect approach uses the Laplace transform and works in the frequency domain. Both approaches are based on matrix operations and polynomial root finding. We also propose an original technique for the classical problem of finding all the roots of a polynomial.

The reduction step consists in determining the different parameters of a simplified scheme that fits the best the characteristics of the RC-network.

To prove the feasibility and the accuracy of our method, a prototype tool that implements all concepts describe in this thesis has been developed.

Keywords

Verification tool, model, reduction, interconnect resistance and capacitance, crosstalk noise.



Remerciements

Cette thèse a été effectuée au sein de l'équipe Architecture des Systèmes Intégrés et Micro-électronique (ASIM) du laboratoire d'informatique de l'université Pierre et Marie Curie (LIP6).

Mes remerciements vont d'abord à mon directeur de thèse, Pirouz Bazargan-Sabet, sans qui ce travail n'aurait pas vu le jour. Je lui suis également reconnaissant pour sa disponibilité, ses qualités humaines, pédagogiques et scientifiques. J'ai beaucoup appris à ses côtés et je lui adresse toute ma gratitude.

J'exprime aussi toute ma reconnaissance à Alain Greiner, professeur à l'université Paris VI, pour m'avoir accueillie dans son équipe et avoir pris le temps de répondre à mes nombreuses questions.

Je voudrais encore remercier les rapporteurs de cette thèse M. Christian Piguet, professeur au CSEM en Suisse, et M. Etienne Sicard, professeur à l'INSA/DGEI de Toulouse, pour la rapidité avec laquelle ils ont lu mon manuscrit et l'intérêt qu'ils ont porté à mon travail. J'associe à ces remerciements Armelle Haen et Davide Pandini pour avoir accepté d'examiner mon travail.

Je remercie ma famille pour m'avoir toujours soutenue, encouragée et aidée tout au long de mon cursus. Plus personnellement, je remercie mon ami, Damien Devillaine, pour son aide, son écoute et surtout sa patience durant la dernière ligne droite.

J'adresse mes plus chaleureux remerciements à mes amis pour avoir supporté mes explications parfois obscures et pour leur soutien.

Merci à tous mes amis du laboratoire, thésards, enseignants, chercheurs, sans oublier les personnels administratifs et techniques sans qui rien ne serait possible, pour leur présence et leur joie de vivre.

Enfin, je remercie toutes les personnes intéressées par mon travail, en espérant qu'elles puissent trouver dans mon rapport des explications utiles pour leurs propres travaux.





À Damien



Table des matières

1	Introduction	1
1.1	Evolution technologique et problèmes sous-jacents	2
1.2	Vérification des circuits intégrés	3
1.3	Vérification post-layout au LIP6	5
1.4	Plan du manuscrit	6
2	Problématique	7
2.1	Introduction	8
2.2	Eléments parasites capacitifs	8
2.2.1	Causes de l'apparition des capacités parasites	9
2.2.2	Effets des capacités de couplage	11
2.2.3	Difficultés liées à l'analyse de diaphonie	12
2.3	Eléments parasites résistifs	14
2.3.1	Importance du phénomène résistif	14
2.3.2	Difficultés liées à la prise en compte des résistances	16
2.4	Conclusion	19
3	Etat de l'art	21
3.1	Introduction	22
3.2	Méthode dite d'Elmore	22

TABLE DES MATIÈRES

3.3	Méthode des trois premiers moments	24
3.4	AWE	28
3.5	Modèles de calcul du bruit avec un agresseur	30
3.6	Modèle de calcul de bruit avec plusieurs agresseurs	35
3.7	Outil d'analyse de diaphonie - CRISE	39
3.8	Conclusion	41
4	Analyse de réseaux de résistances et de capacités	43
4.1	Introduction	44
4.2	Formulation du problème	44
4.2.1	Exemple	47
4.3	Méthode directe	48
4.3.1	Introduction	48
4.3.2	Calcul des τ_i en l'absence de capacités de couplage	48
4.3.3	Calcul des a_i en l'absence de capacités de couplage	53
4.3.4	Cas général des réseaux ayant des capacités de couplage	53
4.3.5	Exemple	55
4.4	Méthode indirecte	59
4.4.1	Triangularisation de la matrice	60
4.4.2	Décomposition en éléments simples	62
4.4.3	Inversion de Laplace	64
4.4.4	Exemple	65
4.5	Conclusion	67
5	Méthodes de recherche des racines des polynômes	69
5.1	Introduction	70
5.2	Méthodes générales	71

5.2.1	Laguerre	71
5.2.2	Newton-Raphson	73
5.3	Notre méthode de recherche des racines	75
5.4	Conclusion	78
6	Réduction de réseaux de résistances et de capacités	79
6.1	Introduction	80
6.2	Choix du modèle simplifié	80
6.2.1	Modèle simplifié de la victime	80
6.2.2	Modèle de l'agresseur	83
6.3	Détermination des paramètres des modèles simplifiés	85
6.3.1	Détermination des paramètres de la victime	85
6.3.2	Détermination des paramètres de l'agresseur	87
6.3.3	Paramètres extraits à partir d'une simulation électrique	88
6.4	Conclusion	89
7	Intégration à l'outil d'analyse de diaphonie CRISE	91
7.1	Introduction	92
7.2	Formulation du problème	92
7.3	Modèle de calcul du bruit	94
7.4	Conclusion	95
8	Mise en œuvre et résultats	97
8.1	Introduction	98
8.2	Mise en œuvre	98
8.3	Description des réseaux utilisés	99
8.4	Encombrement mémoire et nombre de bits de représentation	100

TABLE DES MATIÈRES

8.5	Temps d'exécution	104
8.5.1	Méthode directe	104
8.5.2	Méthode indirecte	106
8.6	Précision du modèle	109
8.7	Conclusion	114
9	Conclusion et perspectives	115
A	Modélisation des éléments parasites	119
B	Coefficients du bruit sur une victime	121
C	Modèle de l'agresseur	123
D	Détails des calculs pour déterminer les paramètres de la victime	127
E	Détails des calculs pour déterminer les paramètres de l'agresseur	129
F	Détails des calculs pour intégration CRISE	133
G	Glossaire	137
H	Listes des publications	139
	Bibliographie	141

Table des figures

1.1	Loi de Moore chez Intel et prédiction pour l'année 2010 donnée par [Sem02] . . .	2
1.2	Finesse de gravure	3
1.3	Flot de conception	4
2.1	Interconnexions et capacités pour $0,25 \mu m$ et $0,13 \mu m$	9
2.2	Interconnexions	10
2.3	Deux signaux couplés par une capacité de couplage	11
2.4	Bruit de diaphonie induit sur la victime par la transition de l'agresseur	11
2.5	Victime, agresseurs et victimes secondaires	13
2.6	Délai dû à une ligne d'interconnexion de $1 mm$ d'après [Sem02]	15
2.7	Fil d'interconnexion	16
2.8	Fil d'interconnexion avec via et coude	16
2.9	Modèle du fil d'interconnexion avec via et coude	17
2.10	Signal représenté par une chaîne	17
2.11	Signal représenté par un arbre	17
2.12	Signal représenté par un réseau	18
2.13	Circuit complexe avec interconnexion	18
3.1	Exemple de réseau modélisant un fil d'interconnexion	23
3.2	Comparaison entre une simulation électrique et la méthode d'Elmore	24

TABLE DES FIGURES

3.3	Comparaison entre une simulation électrique et la méthode des trois premiers moments	27
3.4	Réseau d'interconnexion avec capacités de couplage	28
3.5	Comparaison entre une simulation électrique et la méthode des trois premiers moments en présence de capacités de couplage	28
3.6	Vue physique des fils parallèles agresseur et victime	31
3.7	Modèle du schéma 3.6 comportant des résistances et capacités distribuées . . .	31
3.8	Modèle du schéma 3.6 comportant des résistances et capacités discrets	32
3.9	Réseau équivalent à deux fils parallèles	33
3.10	Comparaison du circuit 3.9 et du circuit 3.8 au moyen d'une simulation électrique	33
3.11	Réseau équivalent à deux fils parallèles	34
3.12	Comparaison du circuit 3.11 et du circuit 3.8 au moyen d'une simulation électrique	34
3.13	Simulation électrique du circuit initial et du circuit réduit avec trois agresseurs pour $L1=40%$, $L2=60%$ et $L3=0%$	35
3.14	Réseau avec plusieurs agresseurs	36
3.15	Réseau pour lequel la victime est un arbre	37
3.16	Simulation électrique du réseau 3.15	37
3.17	Réseau pour lequel la victime est un arbre	38
3.18	Simulation électrique du réseau 3.17	38
3.19	Circuit final équivalent	40
4.1	Connexions résistives et capacitatives autour du nœud i	45
4.2	Exemple de réseau d'interconnexion	47
4.3	Exemple de réseau d'interconnexion	55
5.1	Newton-Raphson	74

5.2	Un polynôme de degré 4 (P_4) et le polynôme de degré 3 ($P_{3,3}$) issu de la déflation de P_4 par r_3	76
5.3	Courbe de l'équation $P_{i,n-1}^2(\alpha_i - a_1)(\alpha_i - a_2)$	77
5.4	Polynômes P_4 , $P_{3,3}$ et fonction $f_3(x) = e^{\alpha_3 \cdot x} P_{3,3}(x)$	78
6.1	Chaîne de résistances et de capacités	80
6.2	Simulation électrique de chaînes composées de trois nœuds pour des capacités à la masse valant $1pF$ et $2pF$	81
6.3	Simulation électrique de chaînes composées de six nœuds pour des capacités à la masse valant $1pF$ et $2pF$	81
6.4	Schéma simplifié de la victime	82
6.5	Simulation du schéma simplifié de la victime	82
6.6	Chaînes de résistances et de capacités couplées	83
6.7	Bruit de diaphonie dû à la transition de l'agresseur	83
6.8	Schéma simplifié du nœud de sortie de la victime en présence de l'agresseur actif a_i	84
6.9	Schéma simplifié du nœud de sortie de la victime en présence de n agresseurs actifs	84
6.10	Exemple de courbes initiales et simplifiées	85
6.11	Exemple de courbes initiales et simplifiées	88
7.1	Schéma simplifié	92
7.2	Victime ayant plusieurs récepteurs (out_1 et out_2) agressé par plusieurs agresseurs (a_1 et a_2)	93
7.3	Schéma simplifié pour la sortie out_1 utilisé pour une analyse de diaphonie	93
7.4	Schéma simplifié général d'un nœud de sortie out_i agressé par n agresseurs actifs	93
7.5	Circuit final pour analyse de diaphonie	94
8.1	Organigramme du prototype	98

TABLE DES FIGURES

8.2	Organigramme des méthodes directe et indirecte	99
8.3	Exemples de réseaux en arbres	100
8.4	Exemples de réseaux avec capacités de couplage	100
8.5	Exemple de réseau maillé	101
8.6	Taille de la mantisse des nombres flottants pour les chaînes	101
8.7	Taille de la mantisse des nombres flottants pour les arbres à deux récepteurs . .	102
8.8	Taille de la mantisse des nombres flottants pour les arbres à trois récepteurs . .	102
8.9	Taille de la mantisse des nombres flottants pour les réseaux ayant un agresseur	103
8.10	Taille de la mantisse des nombres flottants pour les réseaux ayant deux agresseurs	103
8.11	Taille de la mantisse des nombres flottants pour les réseaux ayant deux maillages	104
8.12	Temps d'exécution pour calculer les τ_i avec la méthode directe pour les arbres .	105
8.13	Temps d'exécution pour calculer les a_i avec la méthode directe pour les arbres .	106
8.14	Temps d'exécution pour obtenir les τ_i avec la méthode directe pour les réseaux complexes	106
8.15	Temps d'exécution pour obtenir les a_i avec la méthode directe pour les réseaux complexes	107
8.16	Temps d'exécution pour calculer les τ_i avec la méthode indirecte pour les arbres	107
8.17	Temps d'exécution pour calculer les a_i avec la méthode indirecte pour les arbres	108
8.18	Schéma simplifié versus réseau initial	109
8.19	Tension du schéma simplifié et simulation électrique du réseau initial	110
8.20	Réseau comportant une victime et deux agresseurs	111
8.21	Réseau fractionné une victime et un agresseur	111
8.22	Expression de sortie et simulation électrique	112
8.23	Réseau fractionné une victime et un agresseur	112
8.24	Expression de sortie et simulation électrique	113
8.25	Réseau fractionné une victime et un agresseur	113

TABLE DES FIGURES

A.1	Deux conducteurs et un plan de masse	119
C.1	Modèle de l'agresseur	123
C.2	Modèle de l'agresseur	123
C.3	Modèle de l'agresseur	123
C.4	Modèle de l'agresseur	124

Liste des tableaux

3.1	Erreur de la méthode proposée par [Morton99] par rapport à une simulation électrique	36
8.1	Comparaison entre les résultats obtenus pour la méthode proposée et par simulation électrique pour une victime et 2 agresseurs	110
8.2	Comparaison des temps d'exécution obtenus avec la méthode directe pour le traitement global et fractionné de réseaux	113

Chapitre 1

Introduction

Sommaire

1.1	Evolution technologique et problèmes sous-jacents	2
1.2	Vérification des circuits intégrés	3
1.3	Vérification post-layout au LIP6	5
1.4	Plan du manuscrit	6

L'évolution de la technologie de fabrication des circuits intégrés a fait surgir des nouvelles sources de dysfonctionnement. Dans ce chapitre, nous montrons l'importance de la vérification des circuits intégrés dans le flot de conception. Ensuite, nous décrivons l'analyse des effets parasites telle qu'elle est réalisée au LIP6. Nous présentons enfin le plan de ce manuscrit.

1.1 Evolution technologique et problèmes sous-jacents

Lors de la préparation d'un discours sur l'évolution technologique, Gordon Moore, en 1965, constata que la capacité des circuits en nombre de transistors avait doublé tous les ans entre 1959 et 1965. De ce constat naquit la loi de Moore qui fut publiée dans la revue Electronics sous le titre "Cramming more components into integrated circuits" [Moore65].

En 1975, suite à une réévaluation de cette loi, Moore détermina que le doublement de la capacité aurait lieu tous les 18 mois et non tous les ans. Bien que les années aient passé et que le nombre de transistors ait atteint des dizaines de millions, cette loi est toujours vérifiée [Int00]. La figure 1.1 illustre la loi de Moore chez Intel entre 1971 et 2003 et la prédiction pour l'année 2010 donnée par [Sem02].

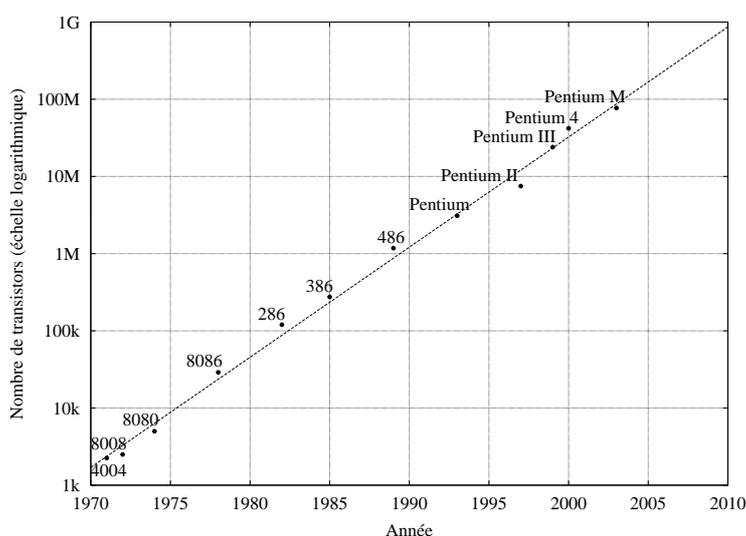


Figure 1.1: Loi de Moore chez Intel et prédiction pour l'année 2010 donnée par [Sem02]

Cette évolution est directement liée à l'amélioration de la technologie d'intégration. La figure 1.2, obtenue d'après [Sem02], montre l'évolution de la finesse de gravure pour la technologie CMOS. Cette évolution s'accompagne d'une modification de la géométrie des fils de métallisation et d'une augmentation du nombre de niveaux de métallisation. Toutes ces modifications accentuent des phénomènes parasites qui étaient jusqu'alors négligés.

Désormais, avec les technologies fortement submicroniques, les fils d'interconnexion ne peuvent plus être considérés comme des équipotentielles. En effet, la réduction de la section des fils augmente leur résistance. Par ailleurs, la diminution de la distance entre les fils est

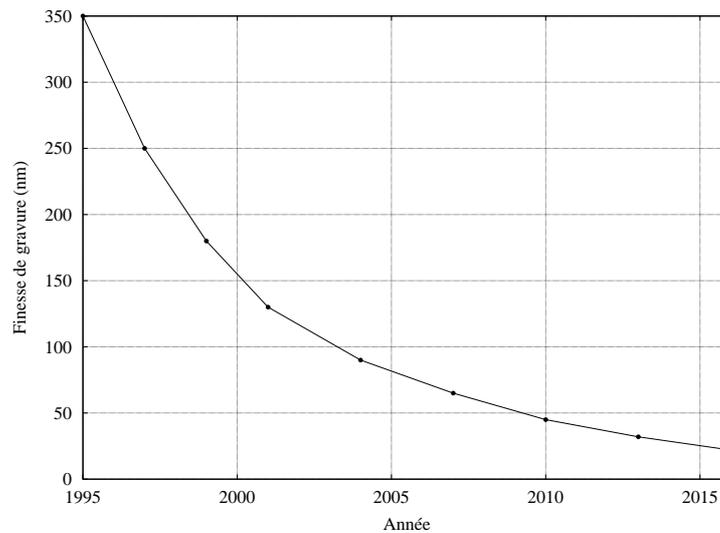


Figure 1.2: Finesse de gravure

à l'origine de l'apparition de capacités de couplage entre des fils voisins. Le phénomène de diaphonie est lié à l'existence de ces capacités. Lors de la transition d'un signal un courant est injecté sur les signaux voisins à travers ces capacités. Lorsque les signaux voisins effectuent une transition, le courant injecté peut accélérer ou ralentir la transition. Lorsque les signaux voisins sont dans un état stable, le courant injecté provoque un pic de tension appelé bruit de diaphonie. L'importance de ces éléments parasites est montrée dans le chapitre suivant.

Dans les technologies fortement submicroniques, ces phénomènes parasites sont loin d'être négligeables et peuvent altérer le bon fonctionnement des circuits aussi bien sur le plan temporel que fonctionnel. Ainsi, l'évolution de la technologie d'intégration fait naître de nouveaux besoins pour des outils de vérification.

1.2 Vérification des circuits intégrés

Aujourd'hui, la vérification de circuits intégrés prend une place de plus en plus importante dans le flot de conception de circuit VLSI aussi bien du point de vue des ressources humaines que des moyens informatiques mobilisés. L'objectif de cette vérification est de détecter au plus tôt les erreurs de conception au cours de la réalisation du circuit.

Classiquement, on peut distinguer deux catégories d'outils de vérification : les outils pré-layout (avant obtention du dessin des masques) et post-layout (après obtention du dessin des

masques). Les premiers interviennent dans le flot de conception (cf. figure 1.3). Lors du passage d'une étape à l'étape suivante ces outils permettent de vérifier que la description du circuit n'a pas subi d'altération. Les seconds sont utilisés à la fin du flot de conception et travaillent directement sur le dessin des masques. L'objectif de ces outils est de vérifier que les spécifications initiales du circuit sont respectées (ex : fréquence de fonctionnement, consommation électrique, DRC, ...). Ils peuvent amener le concepteur à revoir totalement la conception d'un circuit afin de se conformer à ces spécifications.

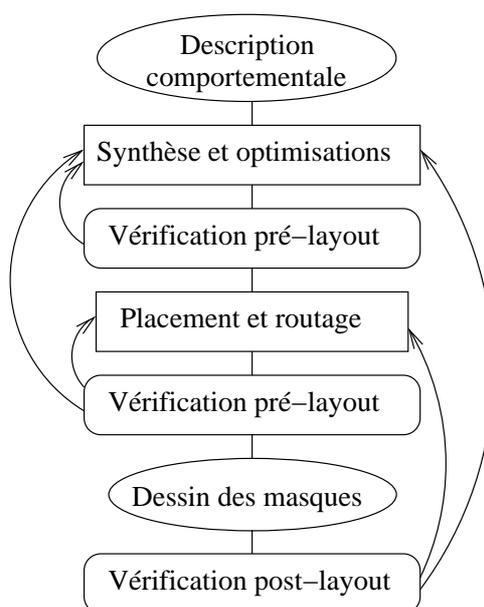


Figure 1.3: Flot de conception

Avec les technologies submicroniques, les outils de vérification post-layout sont confrontés à un double problème :

1. la complexité de la description des circuits ne cesse d'augmenter (cf. figure 1.1) générant ainsi des volumes de données importants,
2. les éléments parasites, qui sont à l'origine des dysfonctionnements, mettent en jeu des phénomènes complexes qui nécessitent une quantité de calcul de plus en plus importante.

Par ailleurs, ces outils sont soumis à une exigence de performance aussi bien pour le temps de calcul que pour la qualité des résultats obtenus. En effet, malgré l'augmentation de la taille des circuits en nombre de composants et malgré la complexité des calculs nécessaires à la vérification, on exige de ces outils de fournir une réponse dans un délai raisonnable.

Toutefois, pour être exploitable par le concepteur cette réponse doit avoir une qualité satisfaisante. En fait, le rôle d'un outil de vérification est de désigner certaines zones ou certains signaux du circuit qui peuvent éventuellement provoquer des dysfonctionnements. Dans ce cas, le concepteur doit analyser les dysfonctionnements, diagnostiquer l'origine précise du problème et y remédier en apportant des modifications au circuit. Cependant, si la qualité de l'outil n'est pas suffisante, il peut désigner comme potentiellement défectueux des signaux sains. Dans ce cas, le temps consacré par le concepteur à l'analyse d'un problème existant est perdu. Ainsi, il est indispensable de trouver un compromis entre la complexité du calcul - donc du temps de calcul - et la précision du calcul dont dépend la qualité du résultat.

Cette thèse se place dans le cadre général des outils de vérification post-layout.

1.3 Vérification post-layout au LIP6

Les outils de vérification post-layout constituent un des axes de recherche du laboratoire LIP6. Les thèses de Amjad Hajjar [Hajjar92], de Karim Dioury [Dioury98] et de Nizar Abdallah [Abdallah98] portent sur l'analyse temporelle des circuits VLSI. Ces trois thèses sont basées sur une modélisation du courant délivré par un transistor et ne tiennent compte ni des résistances d'interconnexion ni des capacités de couplage.

Grégoire Avot, dans sa thèse "Analyse temporelle des circuits intégrés digitaux CMOS pour les technologies profondément submicroniques" [Avot03], propose une méthode de calcul des délais prenant en compte les capacités de diaphonie ainsi que les réseaux résistances-capacités caractérisant les interconnexions.

Fabrice Ilponse, dans sa thèse "Analyse du bruit dû aux couplages capacitifs dans les circuits intégrés numériques fortement submicroniques" [Ilponse02], propose une méthode d'analyse statique du bruit de diaphonie sans prendre en compte les réseaux de résistances-capacités liées aux interconnexions.

Cette thèse s'inscrit dans la continuité de celle de Fabrice Ilponse. Nous nous proposons dans un premier temps d'étudier les réseaux de résistances-capacités qui caractérisent les interconnexions. Ensuite, nous proposons un schéma simplifié de ce réseau adapté à l'analyse de diaphonie et à la simulation logico-temporelle.

1.4 Plan du manuscrit

Dans le chapitre 2, nous présentons les phénomènes de diaphonie et l'apparition des éléments parasites dus aux interconnexions dans les circuits VLSI. Ensuite, nous expliquons en quoi la réduction de réseaux résistances-capacités est nécessaire.

Dans le chapitre 3, nous étudions les causes et les impacts des couplages diaphoniques et des résistances-capacités parasites caractérisant les interconnexions. Puis nous exposons les travaux concernant l'impact des éléments parasites, leurs résultats et leurs limites.

Dans le chapitre 4, nous décrivons deux méthodes permettant d'obtenir la fonction temporelle de sortie des réseaux résistances-capacités. La méthode dite directe utilise le système d'équations temporelles décrivant le circuit. La méthode dite indirecte se base sur la représentation dans le domaine de Laplace.

Dans le chapitre 5, nous exposons deux méthodes générales de recherche des racines de polynôme puis expliquons la méthode de recherche de racine de polynômes que nous avons mise au point, nécessaire aux deux méthodes directe et indirecte.

Dans le chapitre 6, nous proposons une méthode, qui à partir de la fonction temporelle de sortie d'un réseau RC, permet d'obtenir les paramètres du schéma simplifié du réseau initial.

Dans le chapitre 7, nous montrons comment la réduction RC peut s'intégrer à un outil de vérification du bruit de diaphonie.

Dans le chapitre 8, nous exposons la mise en œuvre des méthodes présentées aux chapitres 4, 5 et 6 dans un logiciel prototype ainsi que les résultats obtenus.

Dans le chapitre 9, nous concluons et décrivons les améliorations futures.

Chapitre 2

Problématique

Sommaire

2.1 Introduction	8
2.2 Eléments parasites capacitifs	8
2.3 Eléments parasites résistifs	14
2.4 Conclusion	19

Dans ce chapitre, nous expliquons les origines de l'émergence d'éléments parasites tels que les capacités de couplage et les résistances-capacités d'interconnexion dans les circuits VLSI, les impacts de ces éléments sur le fonctionnement des circuits et sur les outils de vérification.

La complexité des phénomènes induits par ces éléments parasites et l'importance du volume de données à prendre en compte demande un temps de traitement très important lors de la vérification de circuit avant fabrication. C'est pourquoi nous proposons dans cette thèse une méthode efficace qui modélise les circuits d'éléments parasites résistifs et capacitifs par des circuits équivalents mais de taille moindre.

2.1 Introduction

L'évolution des technologies de fabrication, du fait de la diminution de la finesse de gravure, fait apparaître des éléments parasites sur les fils d'interconnexion. Ces éléments se composent de résistances, de capacités et d'inductances.

Contrairement aux technologies microniques où un fil possède une capacité à la masse, dans les technologies submicroniques ($0,35 \mu m$, $0,25 \mu m$) et fortement submicroniques ($0,18 \mu m$, $0,13 \mu m$ et $0,09 \mu m$), les fils d'interconnexion sont modélisés par des capacités à la masse mais aussi par des résistances et des inductances. De plus, dans ces technologies, on voit apparaître des phénomènes de couplage entre des fils voisins à travers des éléments capacitifs ou inductifs.

Si l'effet des résistances des lignes est visible à partir des technologies $0,25 \mu m$, l'effet des inductances n'est pas encore très prononcé dans les technologies disponibles à ce jour. De plus, la complexité des phénomènes induits par les éléments parasites nous pousse, dans cette thèse, à nous limiter volontairement à la prise en compte des résistances et des capacités. Nul doute que les problèmes que nous abordons ici doivent être étendus dans un futur proche aux éléments inductifs.

2.2 Eléments parasites capacitifs

On distingue deux types de capacités : les capacités à la masse et les capacités de couplage. Les capacités à la masse relient un signal et une équipotentielle de tension constante. Les capacités de couplage relient deux fils dont la tension peut varier dans le temps.

Dans les technologies classiques, les deux types de capacités existent mais les capacités à la masse sont prépondérantes.

Par contre, dans les technologies submicroniques, le rapport entre les capacités à la masse et les capacités de couplage change et les capacités de couplage prédominent.

Dans cette section, nous exposons la raison de ce changement, les effets puis les difficultés liées à la prise en compte de ces capacités parasites.

2.2.1 Causes de l'apparition des capacités parasites

Lors de la fabrication d'un circuit intégré, une capacité parasite apparaît dès que deux surfaces conductrices sont en vis-à-vis. L'importance de cette capacité dépend d'un grand nombre de paramètres dont les plus importants sont la taille des surfaces, la distance entre les surfaces en vis-à-vis et la permittivité relative de l'isolant.

Avec les technologies submicroniques, la diminution de la section des fils a généré une augmentation de leur résistance. Les résistances des fils ont de nombreux impacts négatifs sur le fonctionnement d'un circuit. Nous ne citerons que la perte de tension et la dissipation de chaleur pouvant provoquer des dysfonctionnements fonctionnels ou temporels. Pour contrebalancer ces effets, la géométrie des fils est légèrement modifiée.

Une des causes de la prédominance des capacités de couplage est liée à cette modification. Le rapport hauteur-largeur est de 1,8 pour la technologie $0,25 \mu m$ et de 2,1 pour la technologie $0,13 \mu m$ d'après [Sem02] (cf. figure 2.1, où les deux dessins sont à une même échelle).

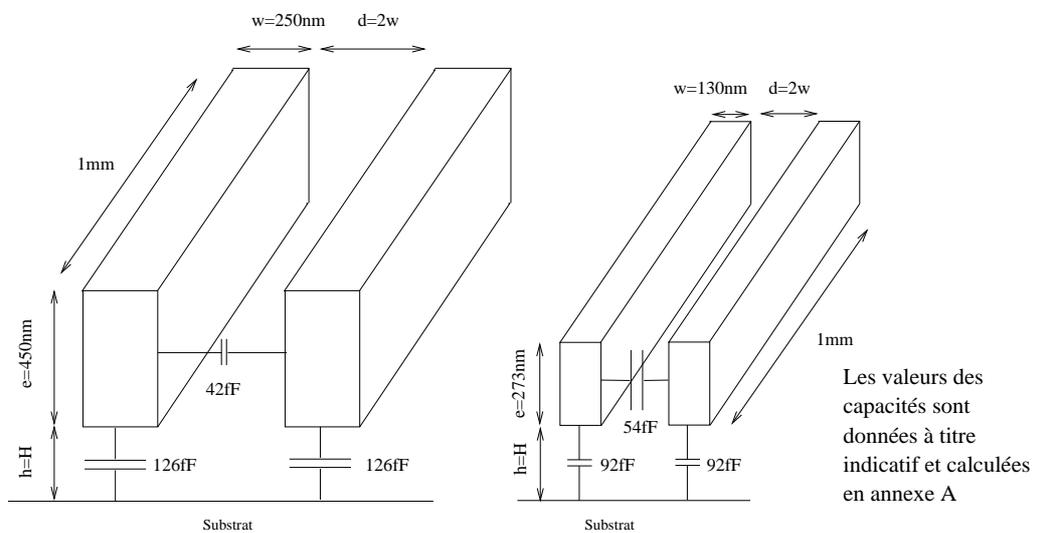


Figure 2.1: Interconnexions et capacités pour $0,25 \mu m$ et $0,13 \mu m$

La modification de la hauteur de fils provoque l'augmentation des surfaces verticales en vis-à-vis et, par conséquent, des capacités de couplage.

Par ailleurs, du fait du rapprochement des fils, la distance entre les surfaces latérales dimi-

nue. Cette diminution accentue l'augmentation des capacités de couplage.

De plus, la largeur des fils d'interconnexions est proportionnelle à la finesse de gravure. Ainsi, la diminution de la finesse de gravure se traduit par une réduction de la largeur des fils, et par conséquent, les surfaces en vis-à-vis du substrat. Ainsi, les capacités à la masse sont plus faibles.

D'autres causes modifient le ratio capacité de couplage-capacités à la masse. D'après [UMC], en 1995, un processeur était composé de 5 niveaux de métallisation alors qu'en 2004 il devrait atteindre 9 niveaux. L'augmentation du nombre de niveaux de métallisation accroît les risques d'apparition de capacités de couplage entre les différents niveaux de métallisation. La figure 2.2 montre ces capacités de couplage entre les différents niveaux de métal (C_{c1} , C_{c2}), ajoutant ainsi de nouvelles capacités de couplage aux capacités de couplages latérales (C_{c3} , C_{c4}).

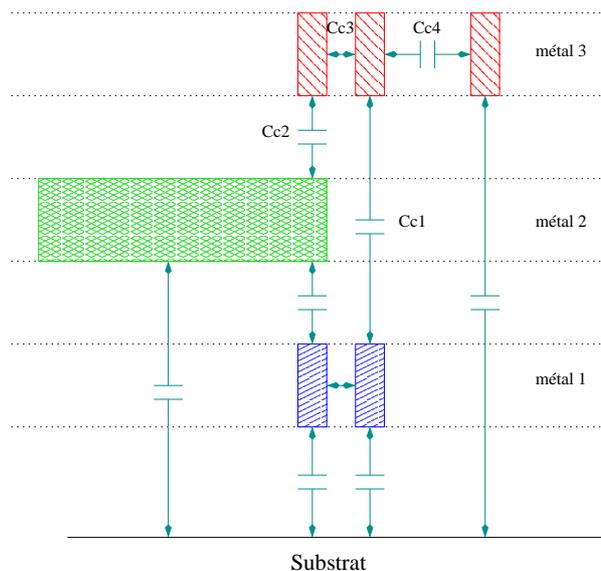


Figure 2.2: Interconnexions

De plus, le substrat peut être masqué par les interconnexions de niveau de métal inférieur, réduisant ainsi les capacités à la masse.

Enfin, la distance entre les couches de métallisation élevée et le substrat participe de nouveau à la réduction des capacités à la masse.

2.2.2 Effets des capacités de couplage

La figure 2.3 montre un exemple simple de couplage entre deux signaux.

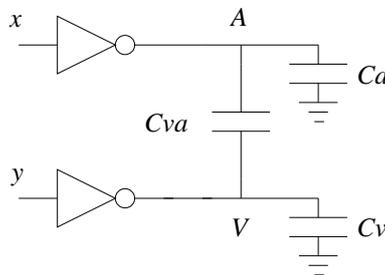


Figure 2.3: Deux signaux couplés par une capacité de couplage

Considérons le cas où le signal A transite de V_{ss} vers V_{dd} . La figure 2.4 montre la variation de la tension du signal V lorsque le signal A effectue sa transition.

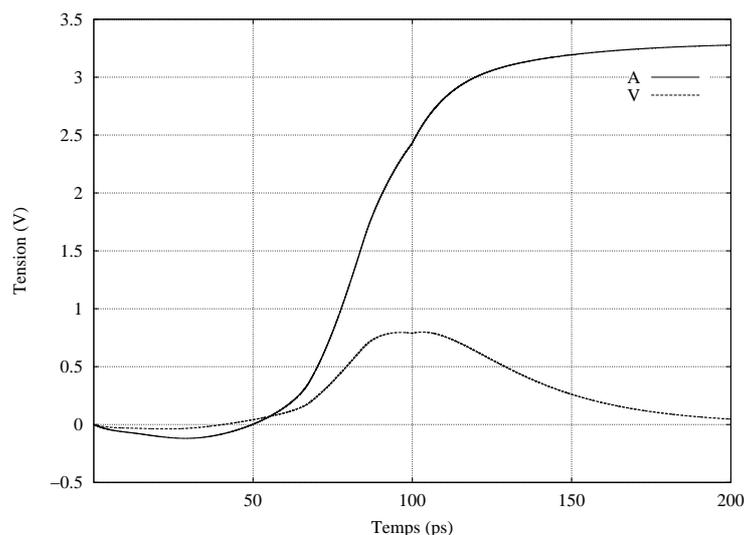


Figure 2.4: Bruit de diaphonie induit sur la victime par la transition de l'agresseur

Pour effectuer cette transition, un courant est délivré par le transistor P de la porte émettrice du signal A . Or, la variation de la tension de A crée, à travers la capacité de couplage C_{va} , un courant qui modifie la tension du signal V . Si celui-ci est dans un état stable, il voit sa tension augmenter. Heureusement, le courant injecté à travers la capacité de couplage est absorbé au bout d'un certain temps par l'inverseur dont la sortie est reliée à V .

Le pic de tension créé sur le signal V est appelé *bruit de diaphonie*. Le signal A , à l'origine de ce bruit, est appelé *agresseur* et le signal V , qui subit l'agression, est appelé *victime*.

Il se peut également qu'au moment où l'agresseur effectue sa transition le signal V soit également en train de changer d'état. Dans ce cas, le courant injecté par la capacité de couplage se traduit par une accélération ou un ralentissement de la transition du signal V .

Ainsi, l'existence de la capacité de couplage peut avoir deux types de conséquences. D'un côté, le bruit de diaphonie, en modifiant le temps de transition des signaux, peut compromettre la fréquence de fonctionnement du circuit (dysfonctionnement temporel). De l'autre, le bruit de diaphonie peut provoquer, dans certains cas extrêmes, des dysfonctionnements logiques. Par exemple, si le pic de tension est suffisamment important et si la victime est un élément mémorisant, la valeur enregistrée dans la mémoire peut basculer et induire des erreurs dans le fonctionnement logique du circuit.

Bien entendu, l'importance du bruit de diaphonie est directement liée à l'augmentation des capacités de couplage et à la diminution des capacités à la masse.

Par ailleurs, le bruit de diaphonie résulte de l'injection d'un courant à travers la capacité de couplage, courant ensuite absorbé par les portes émettrices. Dans les technologies submicro-niques, l'augmentation des fréquences de fonctionnement impose aux signaux d'effectuer des transitions dans un laps de temps plus court. Cela implique des courants plus violents et donc un bruit plus important.

2.2.3 Difficultés liées à l'analyse de diaphonie

L'analyse de diaphonie semble être un problème simple lorsqu'on considère le circuit de la figure 2.3. A partir de cette figure, on peut facilement imaginer que le pic de bruit provoqué sur la victime est d'autant plus grand que la capacité de couplage est importante. La valeur de la capacité à la masse de la victime et de l'agresseur mais également la vitesse de transition de l'agresseur et la taille du transistor de la victime qui absorbe le courant induit influencent également le pic. Cependant, le problème n'est pas d'établir une expression du pic dans le cas de la figure 2.3.

Dans un circuit réel, le schéma des couplages est beaucoup plus complexe. Un signal victime peut être couplé avec des centaines d'agresseurs. Chacun de ces agresseurs peut avoir à son tour des couplages capacitifs avec des centaines d'autres signaux appelés *victimes secondaires*. L'existence de ces couplages a tendance à réduire le pic de tension induit sur la victime

et doit être prise en compte lors de l'analyse du bruit.

Ainsi, l'évaluation du bruit sur un signal victime nécessite une analyse qui implique plusieurs milliers de portes et de signaux. La prise en compte de tous ces couplages rend l'analyse de diaphonie nettement moins triviale.

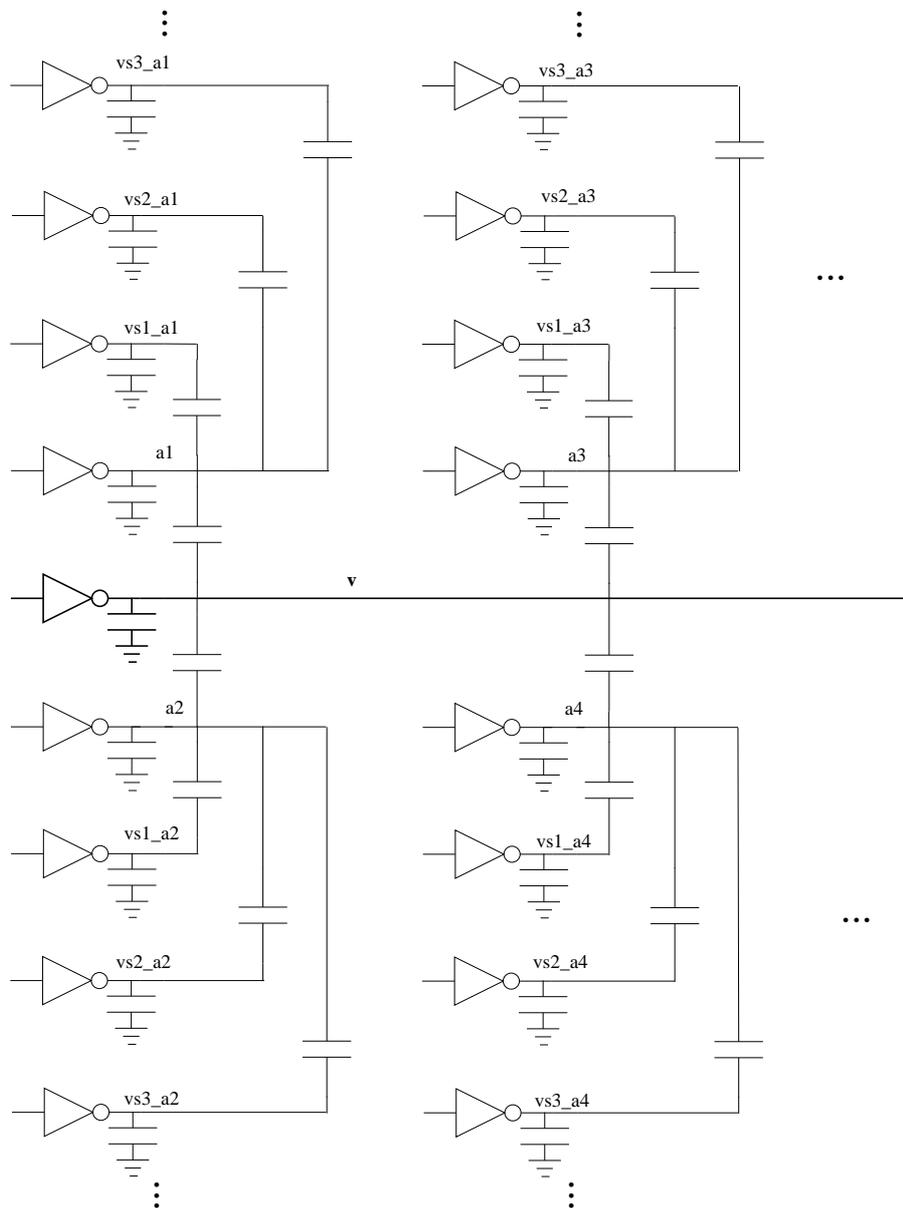


Figure 2.5: Victime, agresseurs et victimes secondaires

De plus, les signaux agresseurs n'effectuent pas forcément tous, à un instant donné, une transition. Afin de donner une évaluation vraisemblable du bruit induit sur une victime, il est indispensable de distinguer les agresseurs qui peuvent effectuer une transition à un instant

donné de ceux qui sont stables. Les agresseurs qui effectuent une transition sont appelés *agresseurs actifs*. A contrario, ceux qui sont, au même moment, dans un état stable sont les *agresseurs muets*.

Enfin, un autre facteur vient s'ajouter à la complexité intrinsèque de l'analyse du bruit. Pour réaliser l'analyse de diaphonie, il est nécessaire de disposer de la valeur des différentes capacités liées à un signal. Or, cette information ne peut être obtenue qu'après le placement et le routage complet du circuit y compris des fils d'interconnexion interblocs. De plus, le bruit de diaphonie peut apparaître entre des signaux indépendamment du découpage fonctionnel du circuit en blocs et des niveaux hiérarchiques auxquels appartiennent ces signaux. De ce fait, une analyse hiérarchique de la diaphonie semble difficilement réalisable.

Ainsi, la conception d'un outil de vérification pour l'analyse de diaphonie allie plusieurs difficultés. Il nécessite un modèle pour évaluer le pic de bruit pour un schéma de couplage impliquant plusieurs milliers de signaux mais aussi une analyse fonctionnelle pour identifier les agresseurs actifs, les agresseurs muets et la configuration qui provoque le bruit maximal. De plus, un tel outil doit travailler sur une représentation à plat du circuit, extrait du dessin des masques de fabrication, et donc comprenant plusieurs millions de transistors.

2.3 Eléments parasites résistifs

Avec l'avènement des technologies fortement submicroniques, l'analyse de diaphonie franchit un niveau de difficulté supplémentaire : la résistance des couches de métallisation n'est plus négligeable et les fils d'interconnexion ne peuvent plus être considérés comme des équipotentielles

2.3.1 Importance du phénomène résistif

La résistance d'un fil est inversement proportionnelle à sa section. Ainsi, la diminution de la section des interconnexions (cf. figure 2.1) a pour effet d'augmenter leur résistance.

Par ailleurs, l'augmentation du nombre de transistors intégrés dans un circuit rend de plus en plus difficile le travail des outils de placement-routage et augmentent la probabilité que deux portes électriquement liées se trouvent à une distance importante. Ainsi, la longueur moyenne

d'interconnexion augmente à chaque nouvelle technologie.

De ce fait, dans les technologies submicroniques, l'augmentation de la résistance des fils d'un côté et de la longueur moyenne de l'autre concourent à l'augmentation du délai de transmission à travers les fils. Ainsi, dans ces technologies, ce délai peut être plus important que le délai de propagation à travers une porte logique.

La figure 2.6 donne l'évolution du délai d'une ligne d'interconnexion de 1 *mm* en pico seconde d'après [Sem02]. Cette courbe montre clairement que le délai dû aux interconnexions a un impact de plus en plus important sur le fonctionnement des circuits.

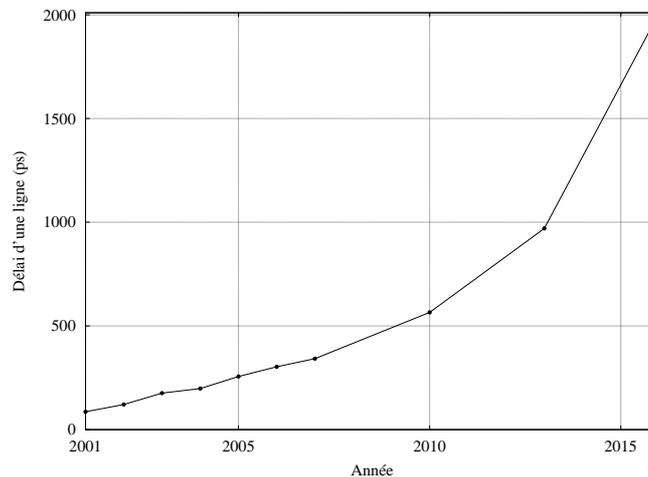


Figure 2.6: Délai dû à une ligne d'interconnexion de 1 *mm* d'après [Sem02]

Sur le plan technologique, plusieurs solutions existent pour limiter l'augmentation du délai dû aux interconnexions. Il est, tout d'abord, possible pour les longues interconnexions d'ajouter des répéteurs et d'utiliser les niveaux supérieurs de métal. Les répéteurs ont pour effet de masquer les capacités en aval de ceux-ci et améliorent la qualité du signal transmis. De même, l'utilisation des niveaux supérieurs, moins résistifs, diminue le délai dû aux interconnexions. Une autre solution consiste à diminuer l'impact des capacités soit en utilisant un isolant ayant une faible constante diélectrique (low K) soit en maintenant une distance importante entre les interconnexions à risque.

2.3.2 Difficultés liées à la prise en compte des résistances

Comme tous les phénomènes physiques, les résistances et capacités des fils sont des grandeurs continues et distribuées tout au long des fils (cf. figure 2.7).



Figure 2.7: Fil d'interconnexion

Par exemple, la résistance d'un fil linéaire de section constante à l'abscisse l , peut être calculée par :

$$R = \int_0^l \frac{\rho}{S} . dl \quad (2.1)$$

où ρ est la résistivité du matériau utilisé et S la section du fil.

Il est évident que de telles expressions ne peuvent pas être utilisées directement dans les outils de vérification. De plus, les fils d'interconnexion ont souvent une topologie complexe et nécessitent donc des intégrations à 2 voire 3 dimensions. Heureusement, ce travail est pris en charge par des outils d'extraction qui fournissent un modèle simplifié et discrétisé du fil.

Ces outils utilisent les informations topologiques (longueur du fil, changement de direction, changement de niveau, ...) pour réaliser ce travail. Par exemple, le fil d'interconnexion de la figure 2.8 peut être modélisé par un extracteur sous forme d'une chaîne de résistances-capacités.

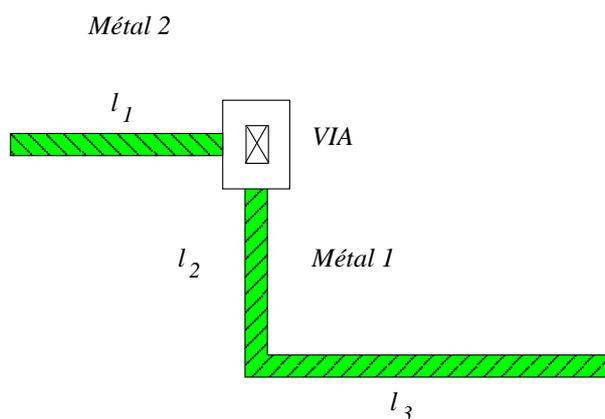


Figure 2.8: Fil d'interconnexion avec via et coude

La partie du fil en métal 2, le via, la partie en métal 1 comprise entre le via et le coude

ainsi que la partie en métal 1 située après le coude sont modélisées chacune par un élément résistance-capacité (cf. figure 2.9).

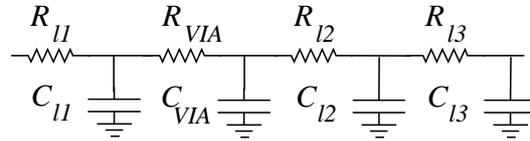


Figure 2.9: Modèle du fil d'interconnexion avec via et coude

Ainsi, un fil d'interconnexion qui relie un émetteur à un récepteur peut comporter plusieurs dizaines d'éléments (cf. figure 2.10).

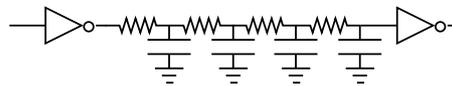


Figure 2.10: Signal représenté par une chaîne

Cependant, dans un circuit réel, un signal peut avoir plusieurs récepteurs. Dans ce cas, une chaîne de résistances-capacités modélise la portion du fil commune aux récepteurs. On obtient alors une modélisation du fil sous forme d'un arbre (cf. figure 2.11).

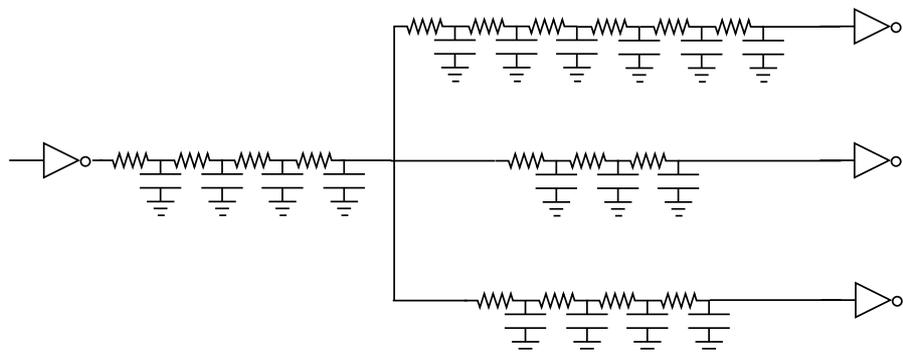


Figure 2.11: Signal représenté par un arbre

Certains fils peuvent avoir un schéma plus complexe. C'est le cas, par exemple, des signaux d'horloge et d'alimentation, qui peuvent comporter un maillage (cf. figure 2.12) ou les bus qui peuvent avoir plusieurs émetteurs.

Enfin, comme nous l'avons vu à la section 2.2, les différents signaux du circuit peuvent être couplés par des capacités de couplage qui prennent ici une forme distribuée (cf. figure 2.13).

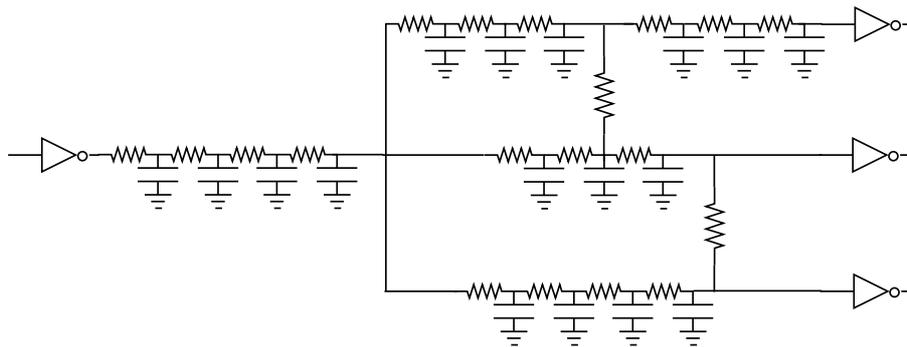


Figure 2.12: Signal représenté par un réseau

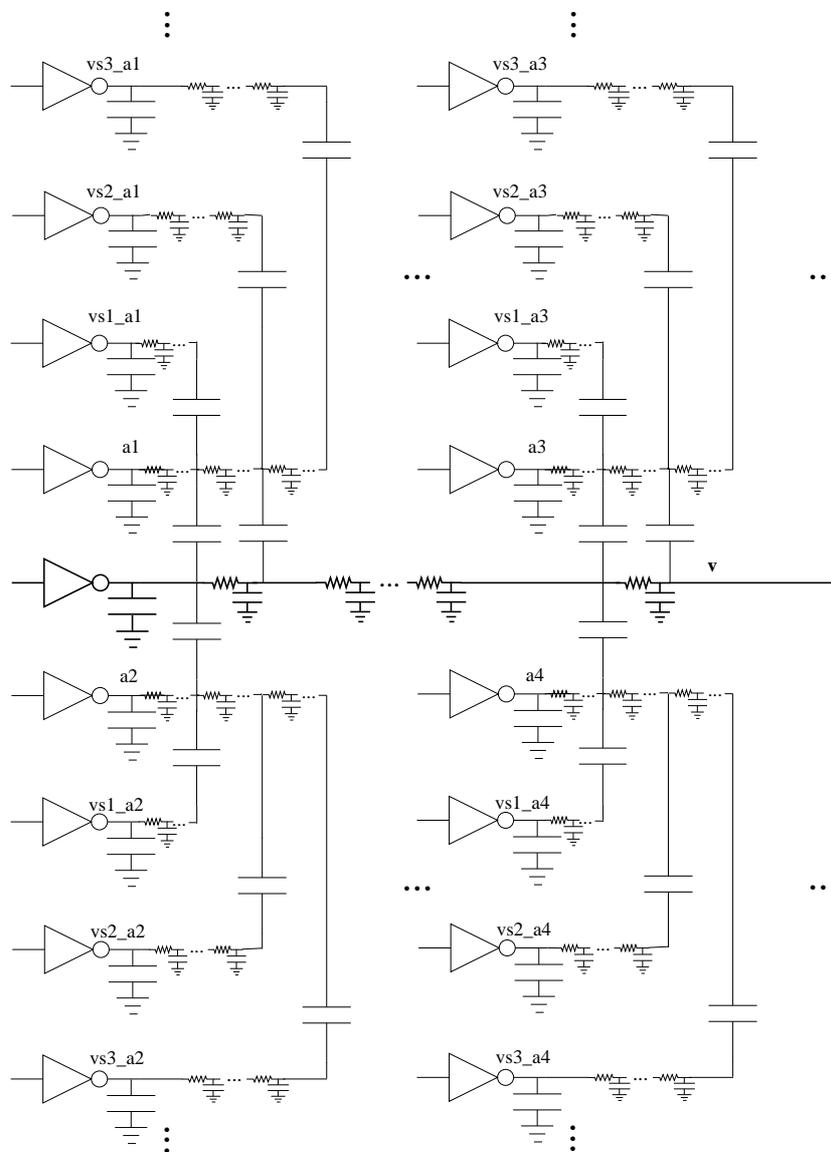


Figure 2.13: Circuit complexe avec interconnexion

Ainsi, l'existence des résistances et capacités parasites d'interconnexion fait exploser le nombre d'éléments à prendre en compte lors de l'analyse des circuits.

2.4 Conclusion

Avec les technologies submicroniques, les outils de vérification post-layout, tels que les outils d'analyse temporelle et d'analyse de bruit, sont confrontés à un double problème. D'un côté, les grandeurs qu'ils tentent d'évaluer (temps de cycle, pic de bruit, ...) mettent en jeu des phénomènes complexes dus aux éléments parasites : résistances, capacités à la masse, capacités de couplage. Une évaluation réaliste de ces grandeurs nécessite à la fois un modèle électrique et une analyse fonctionnelle du circuit dans son ensemble.

De l'autre côté, les circuits que l'on tente de vérifier comportent plusieurs millions de transistors et de signaux et chaque signal peut être modélisé par un réseau complexe de résistances et de capacités et être couplé avec des centaines d'autres signaux.

Dans un tel environnement, il est clair que la vérification d'un circuit de taille réelle est hors de portée des outils aussi bien à cause du temps de calcul nécessaire à l'analyse et à l'évaluation des phénomènes que des ressources mémoires requises pour la représentation du circuit.

Un moyen de contenir cette complexité est de fournir aux outils de vérification un modèle simplifié des interconnexions comportant un petit nombre d'éléments. L'objectif de cette simplification est de réduire à la fois la quantité de calcul et la taille mémoire tout en restant aussi fidèle que possible au schéma initial. Autrement dit, l'évaluation du bruit de diaphonie, incluant un schéma simplifié, doit aboutir à un résultat aussi proche que possible de l'évaluation des circuits obtenus par l'extracteur.

Dans cette thèse nous tentons donc d'apporter une solution aux questions suivantes :

- Quel schéma simplifié peut-on associer à un fil d'interconnexion modélisé par un réseau de résistances et de capacités et comportant des couplages capacitifs avec d'autres signaux ?
- Quelle méthode peut-on utiliser pour calculer les paramètres de ce schéma simplifié ?

Chapitre 3

Etat de l'art

Sommaire

3.1	Introduction	22
3.2	Méthode dite d'Elmore	22
3.3	Méthode des trois premiers moments	24
3.4	AWE	28
3.5	Modèles de calcul du bruit avec un agresseur	30
3.6	Modèle de calcul de bruit avec plusieurs agresseurs	35
3.7	Outil d'analyse de diaphonie - CRISE	39
3.8	Conclusion	41

Dans ce chapitre, nous présentons trois méthodes de réduction des réseaux de résistances et de capacités d'interconnexion.

Ensuite, nous exposons des modèles de calcul du bruit de diaphonie avec un puis plusieurs agresseurs, pour finir avec les travaux de Fabrice Ilponse sur "l'Analyse du bruit dû aux couplages capacitifs dans les circuits intégrés numériques fortement submicroniques".

3.1 Introduction

Nous avons vu dans le chapitre précédant que, pour être réalisable, la vérification des circuits intégrés submicroniques passe par une simplification des réseaux de résistances et de capacités qui modélisent les fils d'interconnexion.

Nous allons à présent étudier quelques méthodes relatives à cette réduction. Nous avons choisi de présenter ici les méthodes les plus couramment utilisées : les méthodes d'Elmore, des trois premiers moments et AWE.

Ensuite, nous exposons quelques modèles d'analyse de bruit de diaphonie qui prennent en compte les résistances et les capacités d'interconnexion.

Enfin, nous présentons l'outil d'analyse du bruit de diaphonie développé par Fabrice Ilponse au cours de sa thèse. Même si cet outil ne prend pas en compte les résistances d'interconnexion, il présente un intérêt majeur pour cette thèse puisque nos travaux se situent dans la continuité de ceux de Fabrice Ilponse.

3.2 Méthode dite d'Elmore

La méthode proposée dans [Elmore48] donne une approximation du temps de propagation entre l'entrée et la sortie d'un réseau de résistances et de capacités. Lorsque le nœud d'entrée effectue une transition de V_{SS} à V_{DD} , le temps de propagation T_{Di} , couramment appelé délai d'Elmore, est défini par

$$x_i(T_{Di}) = \frac{V_{DD}}{2} \quad (3.1)$$

où x_i est la tension du nœud i du réseau.

L'expression de T_{Di} peut être établie simplement dans le cas des réseaux sous forme d'arbre [Rubinstein83] (cf. figure 3.1). Dans ce cas, ce temps s'exprime, pour un nœud i de l'arbre, par

$$T_{Di} = \sum_{k \in \delta} R_{ki} C_k \quad (3.2)$$

où

- δ est l'ensemble des nœuds internes de l'arbre
- k est un nœud de l'arbre

- R_{ki} est la résistance commune entre le chemin qui relie le nœud k à l'entrée et celui reliant le nœud i à l'entrée
- C_k est la capacité totale vue par le nœud k

Considérons le cas de l'arbre de la figure 3.1. Le signal in est l'entrée de l'arbre et le signal out la sortie.

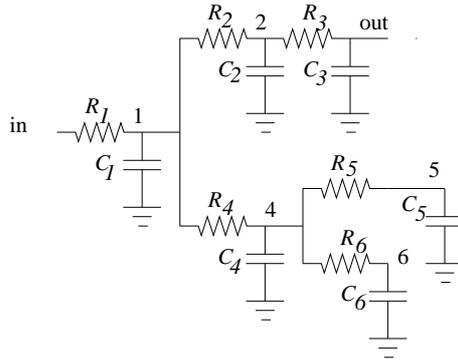


Figure 3.1: Exemple de réseau modélisant un fil d'interconnexion

L'expression du délai d'Elmore, calculée pour la sortie out de cet arbre, est :

$$T_{D_{out}} = C_1 R_1 + C_2(R_1 + R_2) + C_3(R_1 + R_2 + R_3) + C_4 R_1 + C_5 R_1 + C_6 R_1 \quad (3.3)$$

Si on suppose que les résistances R_1 à R_6 valent respectivement 10Ω à 60Ω et les capacités C_1 à C_6 valent $0,1pF$ à $0,6pF$, alors $T_{D_{out}}$ vaut

$$0,1 \cdot 10^{-12} \cdot 10 + 0,2 \cdot 10^{-12} \cdot 30 + 0,3 \cdot 10^{-12} \cdot 60 + (0,4 \cdot 10^{-12} + 0,5 \cdot 10^{-12} + 0,6 \cdot 10^{-12}) \cdot 10 = 40 \cdot 10^{-12} s \quad (3.4)$$

Pour évaluer la pertinence de ce résultat, nous construisons une fonction f_{Elmore} de forme

$$f_{Elmore}(t) = V_{DD}(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) \quad (3.5)$$

et nous déterminons la constante de temps τ de cette fonction telle que

$$f_{Elmore}(T_{D_{out}}) = \frac{V_{DD}}{2} \quad (3.6)$$

Ainsi, la figure 3.2 montre une comparaison entre une simulation électrique et la fonction f_{Elmore} obtenue par la méthode d'Elmore sur l'arbre de la figure 3.1.

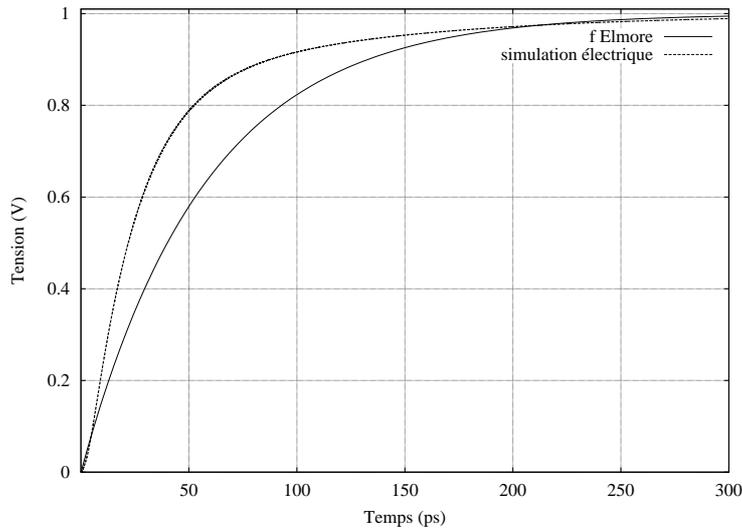


Figure 3.2: Comparaison entre une simulation électrique et la méthode d'Elmore

La méthode d'Elmore permet de déterminer un temps de propagation de manière simple et rapide lorsque le réseau est un arbre.

Par contre, dans le cas général où le réseau n'est pas un arbre et comporte des couplages capacitifs, l'expression du temps T_{De} ne peut pas être établie simplement. De plus, comme nous venons de voir, même dans le cas d'un arbre, elle peut aboutir à des erreurs importantes.

3.3 Méthode des trois premiers moments

Cette méthode [Tutuianu96] se base sur la fonction de transfert, H_{out} , du réseau dans le domaine de Laplace définie par

$$H_{out}(p) = \frac{X_{in}(p)}{X_{out}(p)} \quad (3.7)$$

où X_{in} est la tension d'entrée du réseau et X_{out} la tension de sortie dans le domaine de Laplace.

Pour chaque nœud du circuit, l'expression de ce nœud peut être établie dans le domaine de Laplace en fonction de l'expression des nœuds auxquels il est relié soit par une résistance, soit par une capacité.

Soit i un nœud du circuit, on note $x_i(t)$ l'expression de la tension de ce nœud dans le domaine temporel et $X_i(p)$ l'expression de sa tension dans le domaine de Laplace. De même, on note par G_i la conductance totale du nœud i , C_i sa capacité totale, G_{ij} la conductance entre les

3.3. MÉTHODE DES TROIS PREMIERS MOMENTS

nœuds i et j , C_{ij} la capacité de couplage entre les nœuds i et j . Dans le domaine temporel, le nœud i permet d'écrire

$$G_i \cdot x_i(t) + C_i \cdot x_i'(t) = \sum_j G_{ij} \cdot x_j(t) + \sum_j C_{ij} \cdot x_j'(t) \quad (3.8)$$

ce qui donne dans le domaine de Laplace

$$G_i \cdot X_i(p) + C_i \cdot p \cdot X_i(p) = \sum_j G_{ij} \cdot X_j(p) + \sum_j C_{ij} \cdot p \cdot X_j(p) \quad (3.9)$$

Ainsi le système d'équations suivant caractérise un réseau de résistances et de capacités dans le domaine de Laplace.

$$S \left\{ \begin{array}{l} G_1 \cdot X_1(p) + C_1 \cdot p \cdot X_1(p) = \sum_j G_{1j} \cdot X_j(p) + \sum_j C_{1j} \cdot p \cdot X_j(p) \\ \vdots \\ G_i \cdot X_i(p) + C_i \cdot p \cdot X_i(p) = \sum_j G_{ij} \cdot X_j(p) + \sum_j C_{ij} \cdot p \cdot X_j(p) \\ \vdots \\ G_n \cdot X_n(p) + C_n \cdot p \cdot X_n(p) = \sum_j G_{nj} \cdot X_j(p) + \sum_j C_{nj} \cdot p \cdot X_j(p) \end{array} \right. \quad (3.10)$$

Ce système peut être résolu par substitution. L'objectif de cette résolution est d'obtenir l'expression des nœuds en fonction des entrées. A chaque substitution d'une variable X_j une fraction de polynômes en p apparaît dans les équations. Un développement limité autour de $p = 0$ permet d'approximer cette fraction de polynômes de p par un polynôme. Nous obtenons ainsi une approximation \tilde{H}_{out} de la fonction de transfert H_{out} de forme

$$\tilde{H}_{out}(p) = m_0 + m_1 \cdot p + m_2 \cdot p^2 + m_3 \cdot p^3 + \dots \quad (3.11)$$

où m_i est appelé le moment d'ordre i .

Dans la méthode des trois premiers moments, l'expression de la sortie est approximée dans le domaine temporel par la somme de deux exponentielles.

$$x_{out}(t) = k_1 \cdot e^{p_1 \cdot t} + k_2 \cdot e^{p_2 \cdot t} \quad (3.12)$$

Ce qui donne, une fonction de transfert dans le domaine de Laplace égale à

$$\hat{H}_{out}(p) = \frac{k_1}{p - p_1} + \frac{k_2}{p - p_2} \quad (3.13)$$

Un développement limité autour de $p = 0$ permet de ramener cette somme à un polynôme. Sachant que

$$\frac{k_i}{p - p_i} = - \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{k_i}{p_i^{j+1}} \cdot p^j \quad (3.14)$$

on obtient

$$\hat{H}_{out}(p) = - \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{k_1}{p_1^{j+1}} p^j - \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{k_2}{p_2^{j+1}} p^j \quad (3.15)$$

soit

$$\hat{H}_{out}(p) = - \left(\frac{k_1}{p_1} + \frac{k_2}{p_2} \right) - \left(\frac{k_1}{p_1^2} + \frac{k_2}{p_2^2} \right) \cdot p - \left(\frac{k_1}{p_1^3} + \frac{k_2}{p_2^3} \right) \cdot p^2 - \left(\frac{k_1}{p_1^4} + \frac{k_2}{p_2^4} \right) \cdot p^3 - \dots \quad (3.16)$$

où $p_1 < p_2 < p_3 < \dots < p_n$

Ainsi, il suffit de connaître les quatre premiers moments pour pouvoir calculer la valeur de k_1, k_2, p_1 et p_2 . Par conséquent, lors de la résolution du système d'équations (S) nous pouvons restreindre les développements limités à des polynômes d'ordre 3.

Dans un premier temps les coefficients p_1 et p_2 sont obtenus en divisant et soustrayant les expressions des moments

$$p_1 = \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{m_j}{m_{j+1}} \quad (3.17)$$

$$p_2 = p_1 \cdot \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{\frac{m_j}{m_{j+1}} - \frac{m_{j+1}}{m_{j+2}}}{\frac{m_{j+1}}{m_{j+2}} - \frac{m_{j+2}}{m_{j+3}}}$$

Comme seuls les trois premiers moments sont pris en compte dans cette méthode, nous obtenons une approximation de la valeur de p_1 et de p_2

$$p_1 \approx \frac{m_2}{m_3} \quad (3.18)$$

$$p_2 \approx p_1 \cdot \frac{\frac{m_0}{m_1} - \frac{m_1}{m_2}}{\frac{m_1}{m_2} - \frac{m_2}{m_3}}$$

Ensuite, les coefficients k_1, k_2 sont déterminés après identification des coefficients des polynômes obtenus pour \tilde{H}_{out} et \hat{H}_{out}

3.3. MÉTHODE DES TROIS PREMIERS MOMENTS

$$k_1 = \frac{1 + m_1 p_2}{p_1 - p_2} p_1^2 \quad (3.19)$$

$$k_2 = \frac{1 + m_1 p_1}{p_1 - p_2} p_2^2$$

La figure 3.3 montre une comparaison entre une simulation électrique et la méthode de trois premiers moments pour le nœud *out* de l'arbre de la figure 3.1. On peut remarquer que cette

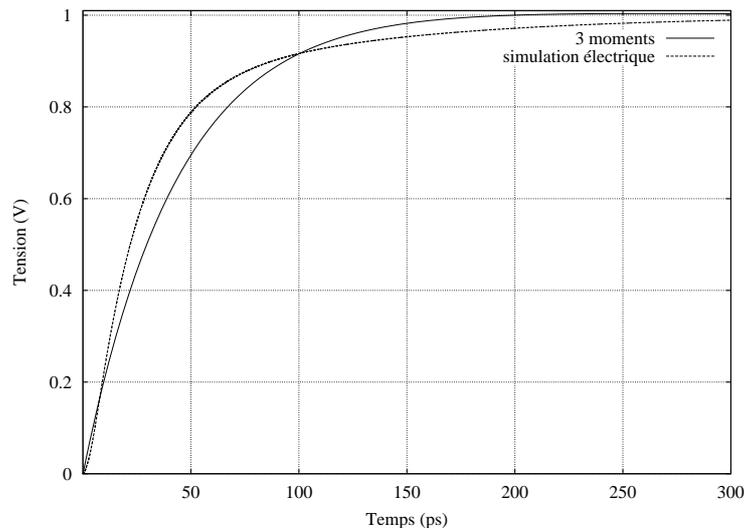


Figure 3.3: Comparaison entre une simulation électrique et la méthode des trois premiers moments

méthode est plus précise que la méthode d'Elmore.

La figure 3.4 donne un autre exemple de réseaux comportant des capacités de couplage. Les résistances R_1 à R_7 valent 10Ω à 70Ω ; les capacités C_1 à C_{10} valent $0,1 pF$ à $1 pF$. Nous considérons que le nœud d'entrée *in* est stable à V_{SS} et que les agresseurs a_1 et a_2 transitent de V_{SS} vers V_{DD} .

La figure 3.5 montre une comparaison entre une simulation électrique et la méthode des trois moments pour le nœud *out* du réseau de la figure 3.4.

Comme nous venons de le voir, la méthode des trois premiers moments peut être appliquée à des réseaux quelconques. Elle a une meilleure précision que la méthode d'Elmore. Cependant, sur les réseaux comportant des capacités de couplage, elle ne donne pas des résultats satisfaisants. Ceci est dû aux développements limités autour des fréquences nulles ($p = 0$). Ces développements sont légitimés par le fait que les réseaux résistances-capacités sans capacité de

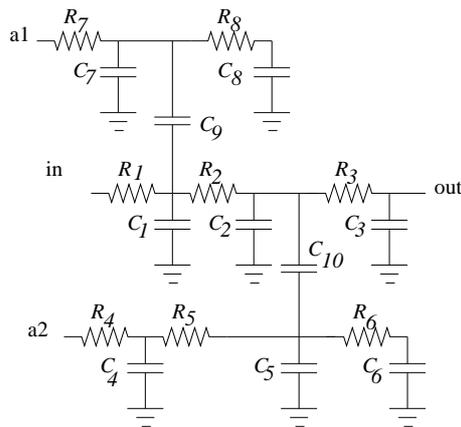


Figure 3.4: Réseau d'interconnexion avec capacités de couplage

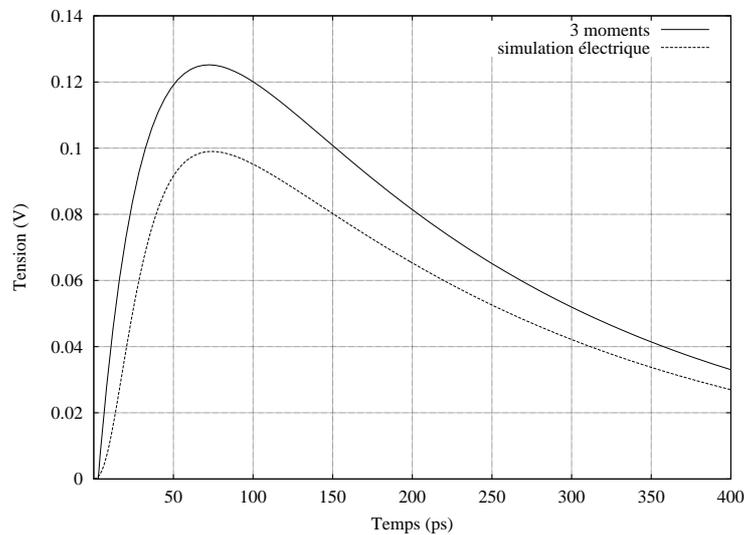


Figure 3.5: Comparaison entre une simulation électrique et la méthode des trois premiers moments en présence de capacités de couplage

couplage sont des filtres passe-bas. Par conséquent, les hautes fréquences sont inexistantes à la sortie d'un tel réseau. La présence de capacités de couplage modifie le fonctionnement du circuit en ajoutant une fonction passe-haut. C'est pourquoi les développements limités autour des fréquences nulles peuvent provoquer des erreurs importantes.

3.4 AWE

La méthode *Asymptotic Waveform Evaluation* [Pillage90], AWE, généralise la méthode des trois premiers moments à l'ordre q . Elle nécessite le calcul des $2q - 1$ premiers moments de

la fonction de transfert sur les nœuds du réseau. Ceci implique de déterminer les équations électriques de chaque nœud du circuit. Le système d'équations représentant le circuit est alors extrait sous forme matricielle. Si le réseau contient n nœuds, cette matrice comporte n^2 éléments où chaque élément est un polynôme de p . Cette matrice de polynômes est alors diagonalisée afin de déterminer les $2q - 1$ moments de la fonction de transfert \tilde{H}_{out} du nœud de sortie out

$$\tilde{H}_{out}(p) = m_0 + m_1 \cdot p + m_2 \cdot p^2 + m_3 \cdot p^3 + \dots \quad (3.20)$$

Dans la méthode AWE, l'expression de la sortie out est approximée par une somme de q exponentielles

$$x_{out}(t) = \sum_{i=1}^q k_i \cdot e^{p_i t} \quad (3.21)$$

Ce qui donne une fonction de transfert dans le domaine de Laplace égale à

$$\hat{H}_{out}(p) = \sum_{i=1}^q \frac{k_i}{p - p_i} = \sum_{i=1}^q \frac{-\frac{k_i}{p_i}}{1 - \frac{p}{p_i}} \quad (3.22)$$

La fonction \hat{H}_{out} peut s'écrire sous forme d'une fraction de deux polynômes

$$\hat{H}_{out}(p) = \frac{\sum_{i=0}^{q-1} a_i \cdot p^i}{1 + \sum_{i=1}^q b_i \cdot p^i} \quad (3.23)$$

où

$$1 + \sum_{i=1}^q b_i \cdot p^i = \prod_{i=1}^q \left(1 - \frac{p}{p_i}\right) \quad (3.24)$$

L'approximation de Padé permet d'écrire la fonction \hat{H}_{out} sous forme d'un polynôme de p

$$\hat{H}_{out}(p) = \frac{\sum_{i=0}^{q-1} a_i \cdot p^i}{1 + \sum_{i=1}^q b_i \cdot p^i} \approx m'_0 + m'_1 \cdot p + m'_2 \cdot p^2 + m'_3 \cdot p^3 + \dots \quad (3.25)$$

Les b_i sont calculés par identification des développements limités de \tilde{H}_{out} et de \hat{H}_{out}

$$\begin{pmatrix} m_0 & \cdots & m_{q-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{q-1} & \cdots & m_{2q-2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_q \\ \vdots \\ b_1 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} m_q \\ \vdots \\ m_{2q-1} \end{pmatrix} \quad (3.26)$$

Pour déterminer la valeur des p_i dans l'expression 3.22 de la fonction de transfert \hat{H}_{out} , il faut calculer les racines du dénominateur de \hat{H}_{out} . Notons, qu'il n'est pas nécessaire de calculer les a_i .

A partir des p_i calculés, les coefficients k_i sont déterminés par

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{p_1} & \cdots & \frac{1}{p_q} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{p_1^q} & \cdots & \frac{1}{p_q^q} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} k_1 \\ \vdots \\ k_q \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} m_0 \\ \vdots \\ m_q \end{pmatrix} \quad (3.27)$$

Cette méthode montre à l'usage quelques limitations. En effet, des erreurs d'arrondi peuvent survenir et fausser les résultats obtenus. De plus, le choix du nombre de moments nécessaires à l'obtention de la précision demandée n'est pas évident. Un nombre de moments trop important donne certes un résultat plus précis mais en un temps plus long. Par ailleurs, cette méthode souffre du même défaut que la méthode des trois premiers moments en présence des capacités de couplage puisqu'elle est également basée sur un développement limité autour de $p = 0$.

3.5 Modèles de calcul du bruit avec un agresseur

De nombreuses méthodes de calcul de bruit de diaphonie ont été développées pour les technologies microniques. Citons par exemple les méthodes présentées dans [Dartu97] [Guardini98] [Stöhr99], qui traitent le cas simple d'une victime couplée à un agresseur sans prendre en compte les réseaux de résistances et de capacités. Bien que simple d'utilisation elles ne peuvent pas être utilisées pour la vérification post-layout du fait de la prédominance des réseaux de résistances et de capacités dans les technologies submicroniques.

[Kahng99] et [Kahng01] proposent un modèle de calcul du bruit basé sur la vue physique du circuit. Isolons une partie des fils agresseur et victime pour laquelle ces fils sont parallèles (cf. figure 3.6). Le signal victime, de longueur L , est composé de trois parties. La première partie de longueur L_1 , reliée à l'émetteur, est la partie gauche du fil qui n'a pas de vis-à-vis. Ensuite, vient la partie de longueur L_2 en vis-à-vis avec le fil agresseur. Enfin, la dernière partie, reliée au récepteur, de longueur L_3 est la partie droite du fil sans vis-à-vis.

Dans un premier temps, cette méthode propose un schéma électrique pour modéliser la victime en présence de l'agresseur. Le fil agresseur est modélisé par une résistance distribuée

3.5. MODÈLES DE CALCUL DU BRUIT AVEC UN AGRESSEUR

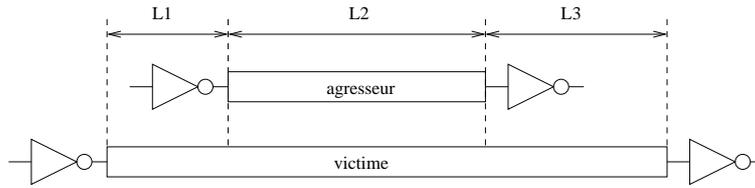


Figure 3.6: Vue physique des fils parallèles agresseur et victime

R_{wA} et une capacité à la masse C_{gA} . Une résistance R_{dA} représente la porte émettrice du signal agresseur tandis que la porte réceptrice est caractérisée par la capacité de charge C_{LA} . Le fil victime est représenté par les mêmes éléments (R_{wV} , C_{gV} , R_{dV} , C_{LV}). Une source de tension V_a permet de provoquer une transition sur l'agresseur alors que la victime est dans un état stable. Pour finir, une capacité de couplage distribuée C_C relie les signaux (cf. figure 3.7).

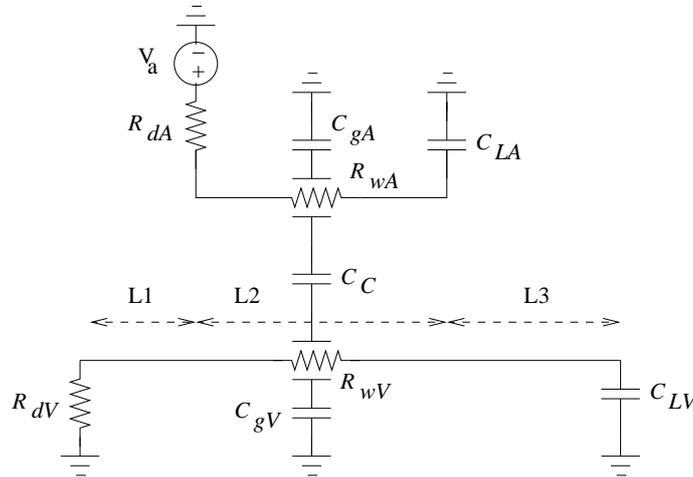


Figure 3.7: Modèle du schéma 3.6 comportant des résistances et capacités distribuées

La présence d'éléments non discrets rend l'analyse du circuit de la figure 3.7 compliquée. Pour simplifier l'analyse de ce réseau, l'ensemble des composants distribués R_{wA} , R_{wV} , C_{gV} , C_{gA} et C_C sont transformés en composants discrets (cf. figure 3.8).

Chaque résistance et capacité est déterminée à partir des résistances et capacités linéaires et des longueurs L_1 , L_2 et L_3 .

$$C'_1 = 0,5.C_{gV} \cdot \left(1 + \frac{L_1}{L} - \frac{L_3}{L}\right)$$

$$C'_2 = 0,5.C_{gV} \cdot \left(1 - \frac{L_1}{L} + \frac{L_3}{L}\right)$$

$$C_{c1} = 0,5.C_c \cdot \left(1 - \frac{L_1}{L}\right)$$

$$C_{c2} = 0,5.C_c \cdot \left(1 + \frac{L_1}{L}\right)$$

$$R_{d2} = R_{dV} + \frac{L_1}{L} \cdot R_{wV}$$

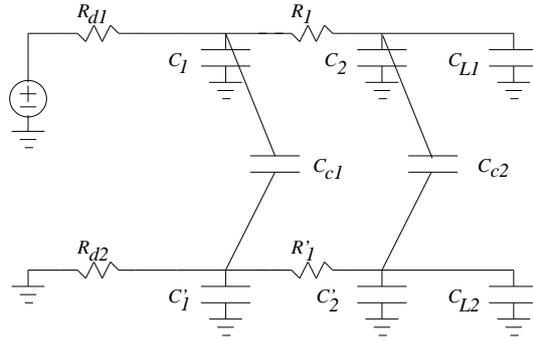


Figure 3.8: Modèle du schéma 3.6 comportant des résistances et capacités discrets

$$R'_1 = R_{wV} \cdot \frac{L_2}{L}$$

En absence de précision dans [Kahng01], nous avons supposé que C_1 et C_2 se répartissent de la même manière que C_{C1} et C_{C2} .

$$C_1 = 0,5 \cdot C_{gA} \cdot \left(1 - \frac{L_1}{L}\right)$$

$$C_2 = 0,5 \cdot C_{gA} \cdot \left(1 + \frac{L_1}{L}\right)$$

De même, nous avons défini la résistance R_1 par $R_{wA} \frac{L_2}{L}$. Enfin, nous avons supposé que

$$R_{d1} = R_{dA}$$

$$C_{L1} = C_{LA}$$

$$C_{L2} = C_{LV}$$

Ce modèle spécifie que, lorsque le signal agresseur subit une transition sous forme d'un échelon, le pic de bruit est donné par

$$V_{bruit} = \frac{V_{dd}}{b_2} (k_1 e^{s_1 t_{bruit}} + k_2 e^{s_2 t_{bruit}}) \quad (3.28)$$

avec

$$t_{bruit} = \frac{1}{s_2 - s_1} \ln\left(-\frac{k_1 s_1}{k_2 s_2}\right) \quad (3.29)$$

k_1, k_2, s_1, s_2, b_2 sont des constantes dont la valeur dépend des différentes résistances et capacités. Afin de ne pas alourdir la lecture, nous avons reporté l'expression de ces constantes en annexe B.

Nous avons appliqué cette méthode au réseau de la figure 3.9, pour lequel les longueurs L_1, L_2 et L_3 rapportées à la longueur totale valent respectivement 20%, 60% et 20%. Les résistances R_i valent 5Ω , la résistance de l'agresseur R_{d1} 500Ω , la résistance de la victime R_{d2} 100Ω , les capacités à la masse $10 fF$, les capacités de couplage $50 fF$ et les capacités de charge $150 fF$.

3.5. MODÈLES DE CALCUL DU BRUIT AVEC UN AGRESSEUR

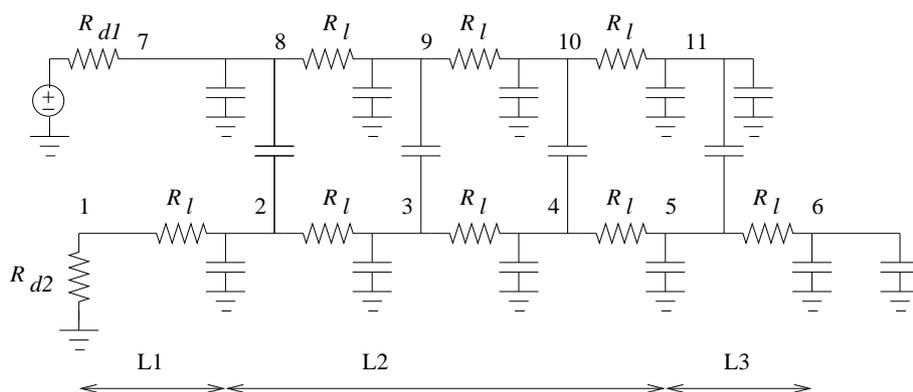


Figure 3.9: Réseau équivalent à deux fils parallèles

La simulation électrique du réseau initial et du réseau réduit (voir figure 3.10) montre que cette méthode est très précise pour cet exemple et cette proportion de fils en vis-à-vis.

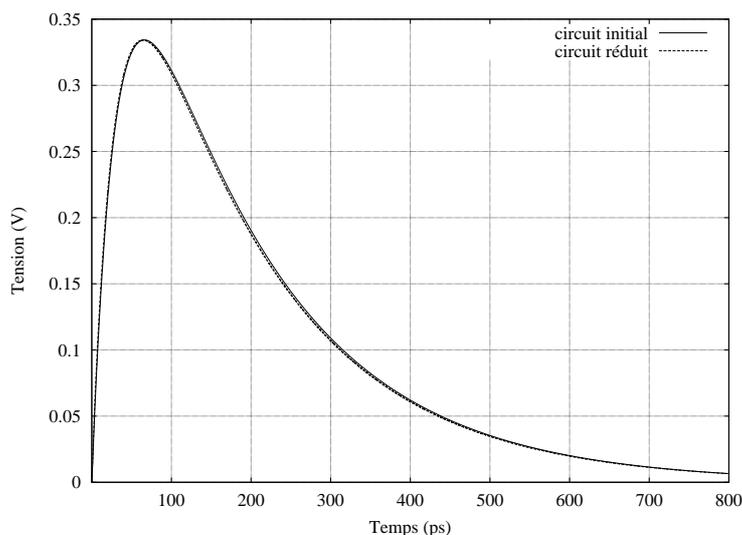


Figure 3.10: Comparaison du circuit 3.9 et du circuit 3.8 au moyen d'une simulation électrique

Par ailleurs, nous avons appliqué cette méthode sur le réseau de la figure 3.11, pour lequel les longueurs L_1 , L_2 et L_3 rapportées à la longueur totale valent respectivement 40%, 60% et 0%.

La figure 3.12 montre les simulations électriques du réseau initial et du réseau réduit pour cette nouvelle configuration. On remarque que dans ce cas l'erreur est plus importante.

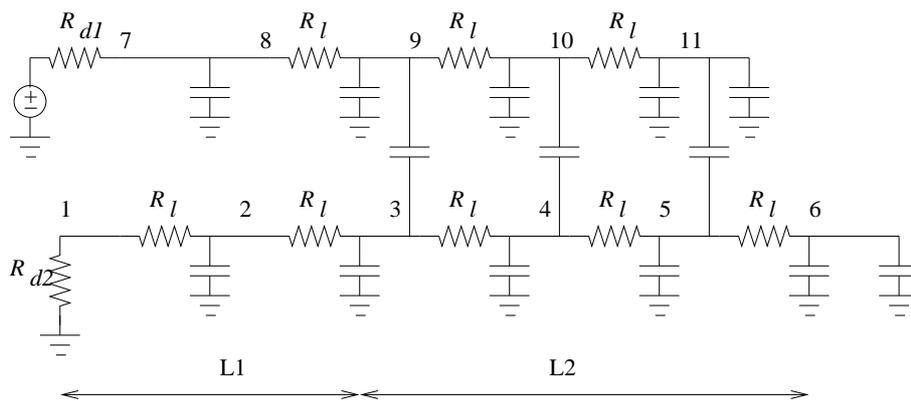


Figure 3.11: Réseau équivalent à deux fils parallèles

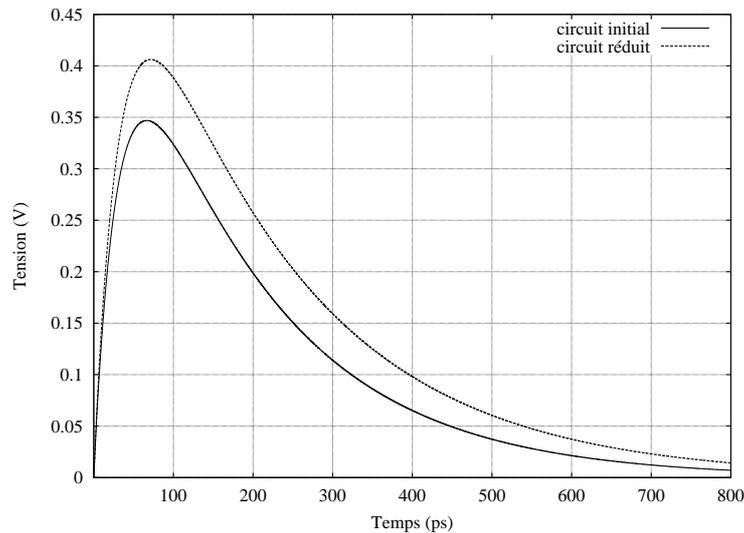


Figure 3.12: Comparaison du circuit 3.11 et du circuit 3.8 au moyen d'une simulation électrique

Dans [Kahng01] les auteurs précisent que cette méthode peut s'appliquer au cas de plusieurs agresseurs simultanés et que dans ce cas, les bruits dus aux différents agresseurs s'additionnent.

Nous avons donc ajouté deux agresseurs identiques à l'agresseur initial au circuit 3.11.

Les résultats des simulations électriques sont montrés sur la figure 3.13. En présence de plusieurs agresseurs, l'erreur due à la réduction est encore plus importante.

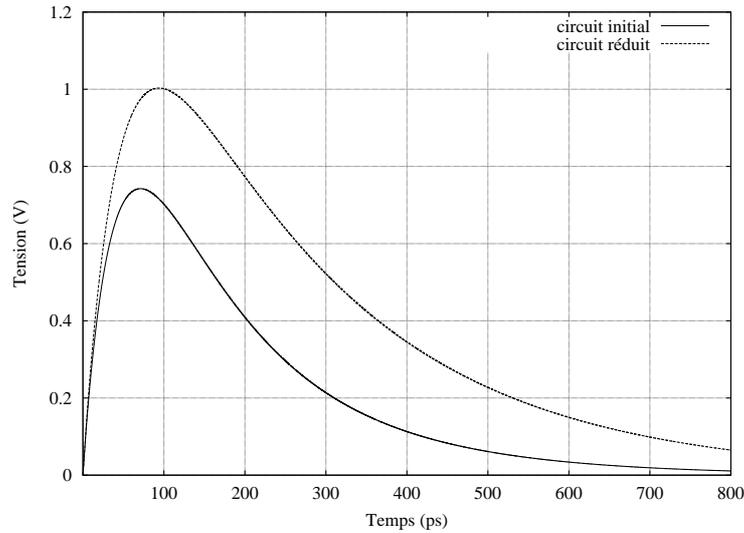


Figure 3.13: Simulation électrique du circuit initial et du circuit réduit avec trois agresseurs pour $L1=40\%$, $L2=60\%$ et $L3=0\%$

Nous avons vu dans cette section que cette méthode, bien que facile à mettre en œuvre, est relativement peu précise. De plus, apparemment elle ne prend en compte que le cas simple d'un émetteur relié à un récepteur. Elle ne peut donc pas être utilisée pour la vérification post-layout. Par contre, elle semble être bien adaptée aux outils de placement-routage pour lesquels une estimation même grossière du bruit de diaphonie suffit pour détecter les situations qui risquent de poser des problèmes.

3.6 Modèle de calcul de bruit avec plusieurs agresseurs

La méthode proposée dans [Morton99], permet de calculer le bruit de diaphonie pour plusieurs agresseurs dans le cas d'un réseau où chaque ligne est un arbre.

Pour un nœud n , le bruit est majoré par :

$$V_{noise}(n) = V_{noise}(Par(n)) + R_n \sum_{i \in Des(n)} \sum_{j \in Ag(i)} C_{ij} U_j \quad (3.30)$$

Où :

$Par(n)$ est le nœud de l'arbre de la victime situé en amont du nœud n

$Des(n)$ est l'ensemble des nœuds de l'arbre de la victime situés en aval du nœud n

$Ag(i)$ est l'ensemble des nœuds ayant un couplage capacitif avec le nœud i

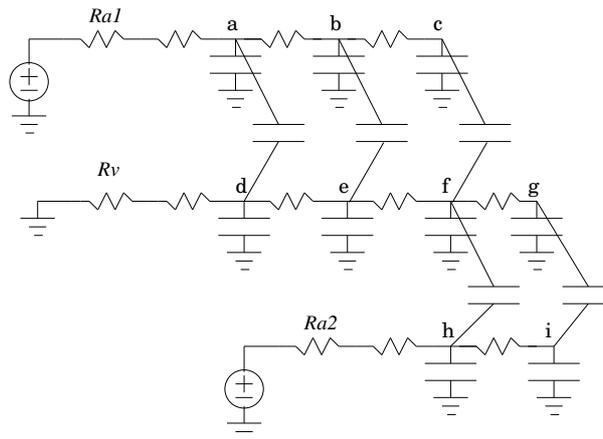


Figure 3.14: Réseau avec plusieurs agresseurs

R_n est la résistance reliant le nœud n au nœud $Par(n)$

C_{ij} est la capacité de couplage entre le nœud i et j

U_j est la pente du signal alimentant le nœud j

La table 3.1 présente les résultats pour le signal e du réseau de la figure 3.14 obtenus par cette méthode et par une simulation électrique pour des résistances de ligne de 5Ω , des capacités à la masse de $1fF$ et des capacités de diaphonie de $10fF$.

Valeur des résistances modélisant les portes		Durée de la pente		
Agresseur	Victime	500ps	100ps	10ps
500	100	0%	-1,34%	-163%
500	50	0%	-0,39%	-132,81%
1000	100	0%	-5,93%	-303,16%
100	1000	-135,58%	-158,2%	-800,46%
500	500	-149,90%	-153,03%	-699,51%

Tableau 3.1 – Erreur de la méthode proposée par [Morton99] par rapport à une simulation électrique

La figure 3.15 représente un autre exemple de réseaux où le signal victime est un arbre. Nous nous intéressons au bruit de diaphonie subit par le nœud a . Les valeurs des résistances et des capacités de lignes sont identiques au réseau 3.14. La résistance de l'agresseur vaut 1000Ω

3.6. MODÈLE DE CALCUL DE BRUIT AVEC PLUSIEURS AGRESSEURS

et de la victime 100Ω .

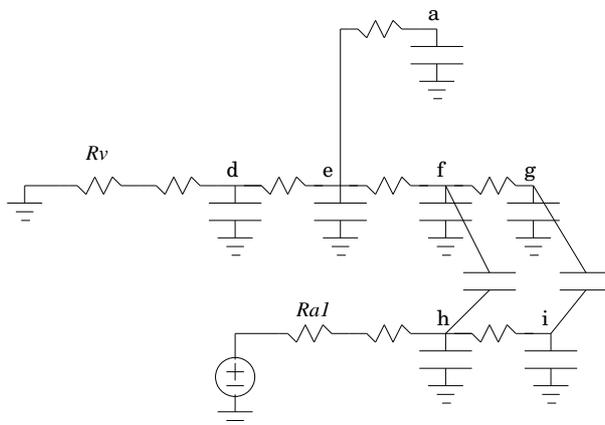


Figure 3.15: Réseau pour lequel la victime est un arbre

En appliquant la formule 3.30 au nœud a du circuit, on obtient

$$\begin{aligned} V_{noise}(a) &= V_{noise}(e) \\ &= V_{noise}(d) \\ &= 0V \end{aligned} \tag{3.31}$$

Cependant, il est évident que le bruit induit sur a est non nul et sa valeur peut être non négligeable en fonction de la valeur des résistances et des capacités (cf. 3.16).

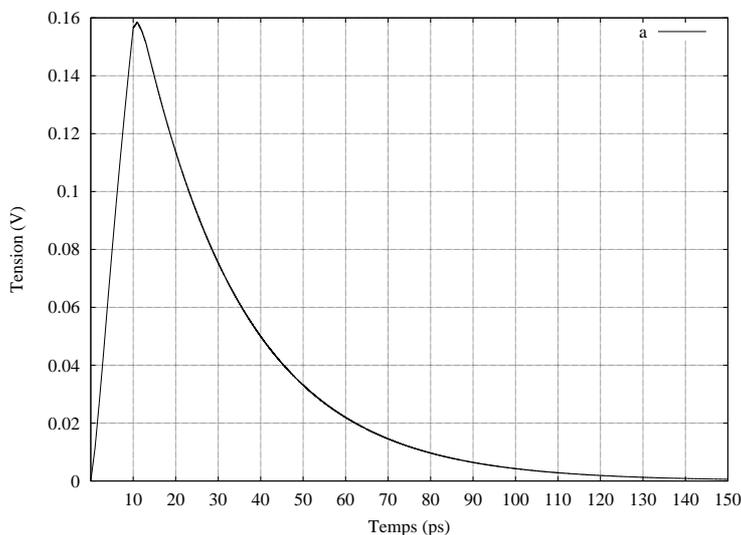


Figure 3.16: Simulation électrique du réseau 3.15

La figure 3.17 présente un dernier exemple de réseau. Nous nous intéressons au bruit sur les nœuds a , b et c .

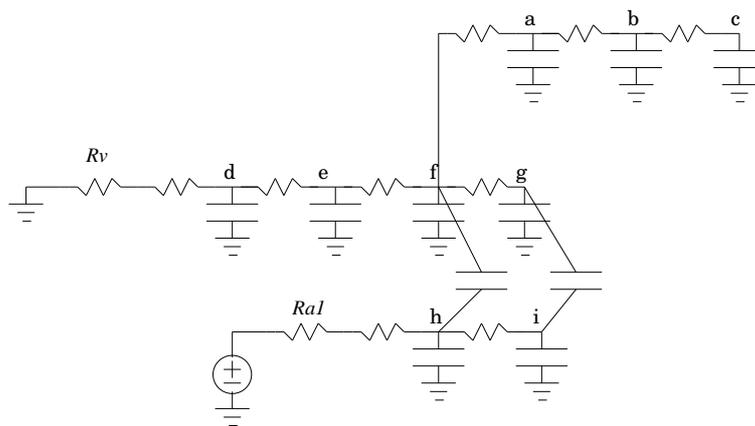


Figure 3.17: Réseau pour lequel la victime est un arbre

L'application de la formule 3.30 donne

$$\begin{aligned}
 V_{noise}(c) &= V_{noise}(b) \\
 &= V_{noise}(a) \\
 &= V_{noise}(f)
 \end{aligned}
 \tag{3.32}$$

Il est clair que, dans un circuit réel, les bruits injectés sur les nœuds a , b , c et f ont toutes les chances d'être différents (cf. figure 3.18).

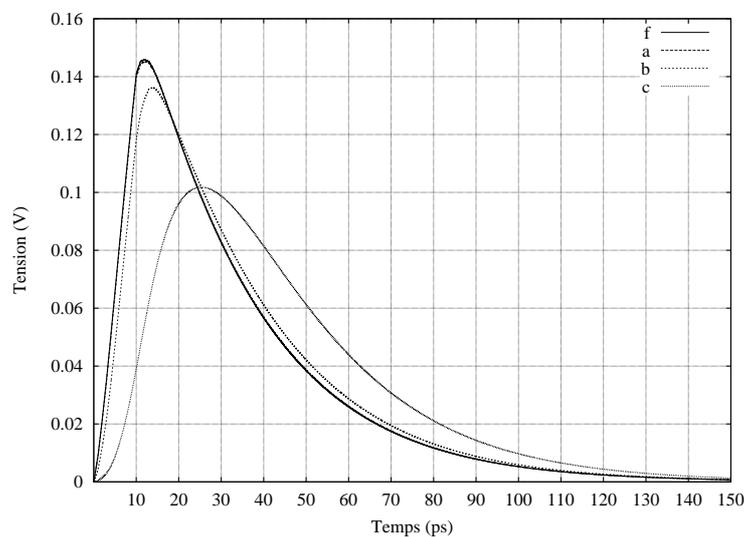


Figure 3.18: Simulation électrique du réseau 3.17

La précision de cette méthode, très simple d'utilisation, varie de manière importante avec la pente de la transition des agresseurs. A travers les quelques exemples que nous venons de voir, il apparaît que cette méthode n'est applicable qu'à des réseaux où il existe un couplage capacitif

sur chaque nœud. De plus, même dans ce cas, l'erreur du résultat peut être très importante.

3.7 Outil d'analyse de diaphonie - CRISE

Dans sa thèse, Fabrice Ilponse décrit un outil de vérification, appelé CRISE, qui permet d'évaluer le bruit de diaphonie induit sur les victimes dans un circuit VLSI complexe. Même si cet outil ne prend pas en compte les résistances des fils d'interconnexion, il présente une méthode de vérification intéressante.

Le point d'entrée de l'outil est une netlist de transistors et de capacités (capacités à la masse et capacités de couplage) obtenue par un outil d'extraction à partir du dessin des masques du circuit.

Un modèle du bruit de diaphonie permet de calculer le bruit subit par chaque signal après distinction des agresseurs actifs et des agresseurs muets. Cette distinction est réalisée par une méthode dite d'identification des configurations d'agression.

Une configuration d'agression, pour un signal victime, est un sous-ensemble de ses agresseurs qui peuvent commuter au même instant.

Une méthode d'analyse statique permet de calculer les configurations d'agression. Cette méthode d'analyse statique d'instabilité est composée de trois étapes. Dans un premier temps, un outil d'abstraction fonctionnelle appelé YAGLE [Lester99], développé au laboratoire LIP6, transforme la netlist de transistors en une netlist de portes. Cette netlist, comparée à la netlist de transistors, présente l'avantage d'être moins volumineuse et constitue un graphe orienté (au sens de la propagation des informations logiques).

Sur cette netlist, les temps de propagation de chaque porte sont obtenus à partir d'un outil d'analyse temporelle [Dioury98], TAS, également développé au laboratoire LIP6.

Pour finir, un simulateur événementiel propage les intervalles d'instabilité donnés par le concepteur pour les entrées du circuit en prenant en compte les délais de propagation minimaux et maximaux des portes. Une fois les intervalles d'instabilité de tous les signaux connus, les configurations d'agression sont déterminées. Un ensemble d'agresseurs constitue une configuration d'agression, si leurs intervalles d'instabilité contient une intersection non nulle.

La méthode de calcul du bruit de diaphonie proprement dite est également composée de plusieurs étapes. Pour chaque victime, la configuration d'agression permet de distinguer les agresseurs actifs des agresseurs muets. La première étape consiste à remplacer chaque porte par une résistance équivalente. Le calcul de cette résistance varie selon que le signal est considéré comme une victime ou comme un agresseur. En effet, les transistors passants d'un signal victime sont majoritairement dans la région linéaire alors que ceux de l'agresseur sont dans la région saturée.

Ensuite, les agresseurs muets et les victimes secondaires sont remplacés par des capacités équivalentes.

Pour finir, pour chaque agresseur actif une source de courant équivalente est calculée de sorte que les pics de bruit générés par l'agresseur et par la source de courant équivalente soient identiques. Ces sources de courant sont de la forme :

$$i_k(t) = I_{0_k} e^{-t/\tau_{i_k}} \quad (3.33)$$

Le schéma simplifié d'une victime couplée à n agresseurs est montré figure 3.19.

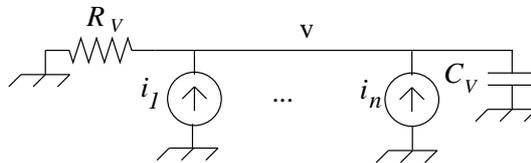


Figure 3.19: Circuit final équivalent

L'équation de v permet alors de calculer la tension maximale de v avec $\tau_v = R_v C_v$

$$x_v(t) = R_v \sum_{k=1}^n I_{0_k} \frac{\tau_{i_k}}{\tau_v - \tau_{i_k}} \cdot (e^{-t/\tau_v} - e^{-t/\tau_{i_k}}) \quad (3.34)$$

D'une manière générale, l'expérience montre que l'erreur de cette méthode comparée à une simulation électrique est inférieure à 20%.

Les erreurs sont essentiellement dues, d'une part, à la modélisation des émetteurs par des résistances et, d'autre part au fait que l'interaction entre les agresseurs actifs soit négligée. Cependant, le défaut majeur de cet outil est de négliger la prise en compte des résistances des lignes d'interconnexion.

3.8 Conclusion

Nous avons présenté trois méthodes de réduction pour les réseaux de résistances et de capacités. Le délai d'Elmore, bien qu'étant très simple, n'est pas assez précis. La méthode des trois premiers moments et AWE donnent un résultat plus précis mais peuvent aboutir à des erreurs importantes en présence de capacités de couplage. Par ailleurs, nous avons exposé trois méthodes ayant pour objectif l'évaluation du bruit de diaphonie. Mis à part l'outil de vérification CRISE, qui ne prend pas en compte les résistances de lignes, les deux autres méthodes ne semblent pas être adaptées à la vérification post-layout des circuits dans des circonstances réelles.

Chapitre 4

Analyse de réseaux de résistances et de capacités

Sommaire

4.1	Introduction	44
4.2	Formulation du problème	44
4.3	Méthode directe	48
4.4	Méthode indirecte	59
4.5	Conclusion	67

Dans ce chapitre, nous exposons deux méthodes permettant d'évaluer la fonction de sortie sur le plan temporel d'un réseau résistances-capacités quelconque : une méthode dite directe utilisant des expressions temporelles et une méthode dite indirecte utilisant la transformée de Laplace.

4.1 Introduction

Nous avons vu, dans le chapitre précédent, que peu de méthodes proposent une réduction précise des réseaux comportant des capacités de couplage. De plus, les méthodes permettant de calculer le bruit de diaphonie en présence des réseaux de résistances et de capacités sont peu nombreuses et assez approximatives.

Dans ce chapitre et les deux chapitres suivants, nous exposons notre méthode de réduction des réseaux de résistances et de capacités. Cette méthode comporte deux parties indépendantes. Nous évaluons, dans l'étape *d'analyse*, la fonction temporelle du signal de sortie. Nous effectuons ensuite la *réduction*, proprement dite. Dans cette étape, nous proposons un schéma simplifié du réseau de résistances et de capacités et nous calculons la valeur des différents composants de ce schéma simplifié. L'intégration du schéma simplifié dans l'outil de vérification de diaphonie est présentée dans le chapitre 7.

Ce chapitre expose, d'abord formellement puis sur un exemple simple, deux méthodes de calcul de la fonction de sortie. La première méthode, dite directe, utilise les expressions temporelles des différents nœuds du circuit. La seconde, dite indirecte, utilise une représentation du circuit dans le domaine de Laplace.

4.2 Formulation du problème

Considérons un fil d'interconnexion victime, ayant des couplages capacitifs avec des fils agresseurs. Chacun des agresseurs peut avoir éventuellement des couplages capacitifs avec d'autres victimes secondaires. Comme nous l'avons vu dans les chapitres précédents, cet ensemble de fils couplés peut être modélisé par un réseau composé de résistances et de capacités.

Considérons un réseau de $m+1$ nœuds numérotés de 0 à m . On note par $x_i(t)$, $i \in \{0, \dots, m\}$, la tension du nœud i dans le domaine temporel et par $X_i(p)$ la tension du nœud i dans le domaine de Laplace. Parmi ces nœuds, on suppose que le nœud 0 est le nœud de référence c'est à dire $x_0(t) = 0$ V. D'autres nœuds, appelés nœuds d'entrée, représentent l'extrémité initiale d'un fil (victime ou agresseur). Ces nœuds sont reliés à la sortie d'une porte et donc ont une tension imposée par cet émetteur. Des nœuds, appelés nœuds de sortie, sont les extrémités finales du fil victime. Ils sont reliés aux entrées de portes réceptrices. Hormis les nœuds d'entrée

et de sortie, il y a les nœuds dits internes, qui ne sont reliés ni à l'entrée ni à la sortie d'une porte.

Dans ce chapitre nous nous intéressons à l'étape d'analyse. L'objectif des méthodes exposées dans ce chapitre est d'obtenir une expression de la tension des nœuds de sortie en fonction des tensions des nœuds d'entrée.

Considérons un nœud i relié à un ou plusieurs nœuds l par une résistance. On note R_{il} la résistance entre le nœud i et le nœud l . De même, si i est relié à un nœud k par une capacité, cette capacité est notée C_{ik} . C_{i0} représente donc la capacité à la masse du nœud i (cf. figure 4.1).

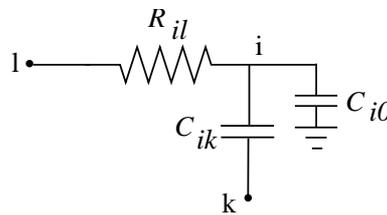


Figure 4.1: Connexions résistives et capacitatives autour du nœud i

La loi des nœuds appliquée en i permet d'écrire

$$\sum_{j=0}^m \frac{x_i(t) - x_j(t)}{R_{ij}} + \sum_{j=0}^m C_{ij}(x'_i(t) - x'_j(t)) = 0 \quad (4.1)$$

Soit, en isolant les termes en x_i

$$\sum_{j=0}^m \frac{x_i(t)}{R_{ij}} + \sum_{j=0}^m C_{ij}x'_i(t) = \sum_{j=0}^m \frac{x_j(t)}{R_{ij}} + \sum_{j=0}^m C_{ij}x'_j(t) \quad (4.2)$$

Ce qui peut aussi s'écrire :

$$G_i \cdot x_i(t) + C_i \cdot x'_i(t) = \sum_{j=0}^m G_{ij} \cdot x_j(t) + \sum_{j=0}^m C_{ij} \cdot x'_j(t) \quad (4.3)$$

avec

$$G_i \text{ conductance totale du nœud } i : G_i = \sum_{j=0}^m \frac{1}{R_{ij}}$$

$$C_i \text{ capacité totale du nœud } i : C_i = \sum_{j=0}^m C_{ij}$$

G_{ij} conductance entre les nœuds i et j : $G_{ij} = \frac{1}{R_{ij}}$. Lorsque les nœuds i et j ne sont pas reliés par une résistance, la conductance G_{ij} est nulle (en particulier $G_{ii} = 0$).

C_{ij} capacité entre les nœuds i et j . Lorsque les nœuds i et j ne sont pas reliés par une capacité, la capacité C_{ij} est nulle (en particulier $C_{ii} = 0$).

Par convention, on numérote de 1 à l les nœuds internes, de $l + 1$ à n les nœuds de sortie et de $n + 1$ à m les nœuds d'entrée.

A partir de l'équation 4.3, nous pouvons modéliser, dans le domaine temporel, le réseau RC composé de $m + 1$ nœuds par le système d'équations linéaires du premier ordre S_t .

$$S_t \begin{cases} G_1 \cdot x_1(t) + C_1 \cdot x_1'(t) = \sum_{j=0}^m G_{1j} \cdot x_j(t) + \sum_{j=0}^m C_{1j} \cdot x_j'(t) \\ \vdots \\ G_i \cdot x_i(t) + C_i \cdot x_i'(t) = \sum_{j=0}^m G_{ij} \cdot x_j(t) + \sum_{j=0}^m C_{ij} \cdot x_j'(t) \\ \vdots \\ G_n \cdot x_n(t) + C_n \cdot x_n'(t) = \sum_{j=0}^m G_{nj} \cdot x_j(t) + \sum_{j=0}^m C_{nj} \cdot x_j'(t) \end{cases} \quad (4.4)$$

De même, dans le domaine de Laplace, nous obtenons le système S_l

$$S_l \begin{cases} G_1 \cdot X_1(p) + p \cdot C_1 \cdot X_1(p) = \sum_{j=0}^m G_{1j} \cdot X_j(p) + \sum_{j=0}^m p \cdot C_{1j} \cdot X_j(p) \\ \vdots \\ G_i \cdot X_i(p) + p \cdot C_i \cdot X_i(p) = \sum_{j=0}^m G_{ij} \cdot X_j(p) + \sum_{j=0}^m p \cdot C_{ij} \cdot X_j(p) \\ \vdots \\ G_n \cdot X_n(p) + p \cdot C_n \cdot X_n(p) = \sum_{j=0}^m G_{nj} \cdot X_j(p) + \sum_{j=0}^m p \cdot C_{nj} \cdot X_j(p) \end{cases} \quad (4.5)$$

Remarquons que dans ces systèmes pour tout i, j $C_{ij} = C_{ji}$ et $G_{ij} = G_{ji}$.

On sait que la résolution de ce système aboutit, pour chaque nœud du réseau à une équation différentielle d'ordre n de la forme

$$\alpha_n \cdot x_i^{(n)}(t) + \alpha_{n-1} \cdot x_i^{(n-1)}(t) \cdots + \alpha_0 \cdot x_i^{(0)}(t) = 0 \quad (4.6)$$

dont la solution est

$$x_i(t) = \sum_{k=1}^n a_{ik} \cdot e^{-\frac{t}{\tau_k}} + a_{i0} \quad (4.7)$$

où

a_{i0} est la tension lorsque $t \rightarrow +\infty$ du nœud i .

a_{ik} est un coefficient en Volt.

τ_k est une constante de temps.

4.2.1 Exemple

Etudions le réseau de la figure 4.2. Les nœuds 1 et 2 sont les nœuds internes, 3 est la sortie, 4 et 5 sont les entrées. Les capacités à la masse valent $10 fF$, la capacité de couplage $50 fF$ et les résistances 5Ω .

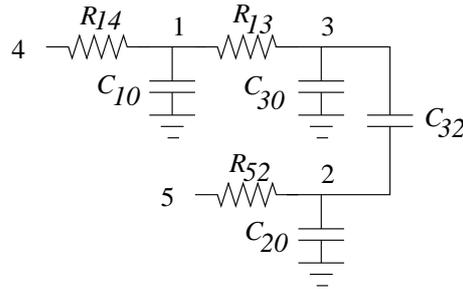


Figure 4.2: Exemple de réseau d'interconnexion

Le système d'équations suivant caractérise la figure 4.2.

$$\begin{cases} G_1 \cdot x_1(t) + C_1 \cdot x_1'(t) = \sum_{j \in \{3,4\}} G_{1j} \cdot x_j(t) + \sum_{j \in \{0\}} C_{1j} \cdot x_j'(t) \\ G_2 \cdot x_2(t) + C_2 \cdot x_2'(t) = \sum_{j \in \{5\}} G_{2j} \cdot x_j(t) + \sum_{j \in \{0,3\}} C_{2j} \cdot x_j'(t) \\ G_3 \cdot x_3(t) + C_3 \cdot x_3'(t) = \sum_{j \in \{1\}} G_{3j} \cdot x_j(t) + \sum_{j \in \{0,2\}} C_{3j} \cdot x_j'(t) \end{cases}$$

Soit

$$\begin{cases} (G_{41} + G_{13}) \cdot x_1(t) + C_{10} \cdot x_1'(t) = G_{13} \cdot x_3(t) + G_{14} \cdot x_4(t) \\ G_{25} \cdot x_2(t) + (C_{25} + C_{32}) \cdot x_2'(t) = G_{25} \cdot x_5(t) + C_{23} \cdot x_3'(t) \\ G_{31} \cdot x_3(t) + (C_{31} + C_{32}) \cdot x_3'(t) = G_{31} \cdot x_1(t) + C_{32} \cdot x_2'(t) \end{cases}$$

Ou encore dans le domaine de Laplace

$$\begin{cases} (G_{41} + G_{13}) \cdot X_1(p) + p \cdot C_{10} \cdot X_1(p) = G_{13} \cdot X_3(p) + G_{14} \cdot X_4(p) \\ G_{25} \cdot X_2(p) + p \cdot (C_{25} + C_{32}) \cdot X_2(p) = G_{25} \cdot X_5(p) + p \cdot C_{23} \cdot X_3(p) \\ G_{31} \cdot X_3(p) + p \cdot (C_{31} + C_{32}) \cdot X_3(p) = G_{31} \cdot X_1(p) + p \cdot C_{32} \cdot X_2(p) \end{cases}$$

Pour cet exemple, la solution est de la forme

$$\begin{aligned} x_1(t) &= \sum_{k=1}^3 a_{1k} \cdot e^{-\frac{t}{\tau_k}} + a_{10} \\ x_2(t) &= \sum_{k=1}^3 a_{2k} \cdot e^{-\frac{t}{\tau_k}} + a_{20} \\ x_3(t) &= \sum_{k=1}^3 a_{3k} \cdot e^{-\frac{t}{\tau_k}} + a_{30} \end{aligned} \quad (4.8)$$

4.3 Méthode directe

4.3.1 Introduction

Cette méthode consiste à résoudre le système S_t décrit dans le domaine temporel. Il est à noter que lors de cette résolution, nous n'effectuons aucune approximation.

Tout d'abord nous exposons la méthode dans le cas simple de réseaux sans capacités de couplage. Nous cherchons à déterminer les différentes constantes de temps τ_i puis les coefficients a_{ik} pour un nœud k quelconque. Dans un deuxième temps, nous montrons comment, un réseau quelconque comportant des capacités de couplage peut être ramené à ce cas simple.

4.3.2 Calcul des τ_i en l'absence de capacités de couplage

Nous cherchons à déterminer les constantes de temps τ_i . Sachant qu'il existe n constantes de temps, nous allons établir n équations.

Considérons le cas simple d'un réseau où il n'existe pas de capacités de couplage entre les nœuds. L'expression de la tension $x_i(t)$ en chaque nœud i est de la forme $x_i(t) = \sum_{k=1}^n a_{ik} \cdot e^{-\frac{t}{\tau_k}} + a_{i0}$. La valeur initiale (à $t = 0$) du nœud i est fixée par les conditions initiales du système et est connue. La valeur de la tension du nœud i lorsque $t \rightarrow +\infty$ est également connue et dépend de la valeur des entrées. Nous pouvons donc établir une première équation

$$a_{i0} + a_{i1} + \dots + a_{in} = x_i(0) \quad (4.9)$$

soit

$$a_{i1} + a_{i2} + \dots + a_{in} = x_i(0) - a_{i0} \quad (4.10)$$

ou encore en notant $x_{i0} = x_i(0) - a_{i0}$

$$a_{i1} + a_{i2} + \dots + a_{in} = x_{i0} \quad (4.11)$$

Or, nous connaissons non seulement la valeur initiale du nœud i mais aussi de tous les nœuds du circuit. Ainsi, en utilisant la loi des nœuds sur le nœud i , nous pouvons déterminer la valeur initiale de la dérivée du nœud i , $x'_i(0)$:

$$\begin{aligned} G_i \cdot x_i(t) + C_i \cdot x'_i(t) &= \sum_{j=0}^m G_{ij} \cdot x_j(t) \\ x'_i(0) &= \frac{1}{C_i} \left(\sum_{j=0}^m G_{ij} \cdot x_j(0) - G_i \cdot x_i(0) \right) \end{aligned} \quad (4.12)$$

Par ailleurs, en dérivant l'expression $x_i(t)$, nous obtenons

$$x'_i(t) = - \sum_{k=1}^n \frac{a_{ik}}{\tau_k} \cdot e^{-\frac{t}{\tau_k}} \quad (4.13)$$

d'où à l'instant $t = 0$: $x'_i(0) = - \sum_{k=1}^n \frac{a_{ik}}{\tau_k}$.

Notons par x_{i1} , $x'_i(0)$. Nous obtenons une seconde équation :

$$\frac{a_{i1}}{\tau_1} + \frac{a_{i2}}{\tau_2} + \dots + \frac{a_{in}}{\tau_n} = -x_{i1} \quad (4.14)$$

De la même manière, à partir de la dérivée de l'équation du nœud i , nous pouvons calculer la valeur initiale de la dérivée seconde de x_i

$$x''_i(0) = \frac{1}{C_i} \left(\sum_{j=0}^m G_{ij} \cdot x'_j(0) - G_i \cdot x'_i(0) \right) \quad (4.15)$$

or

$$x''_i(0) = \sum_{k=1}^n \frac{a_{ik}}{\tau_k^2} \quad (4.16)$$

d'où en notant $x_{i2} = x''_i(0)$

$$\frac{a_{i1}}{\tau_1^2} + \frac{a_{i2}}{\tau_2^2} + \dots + \frac{a_{in}}{\tau_n^2} = x_{i2} \quad (4.17)$$

En appliquant cette méthode nous obtenons donc un ensemble d'équations où les variables sont a_{i1}, \dots, a_{in} et τ_1, \dots, τ_n .

Intéressons-nous aux $n + 1$ premières équations

$$S_{der} \begin{cases} a_{i1} + a_{i2} + \dots + a_{in} = (-1)^0 x_{i0} \\ \frac{a_{i1}}{\tau_1} + \frac{a_{i2}}{\tau_2} + \dots + \frac{a_{in}}{\tau_n} = (-1)^1 x_{i1} \\ \vdots \\ \frac{a_{i1}}{\tau_1^p} + \frac{a_{i2}}{\tau_2^p} + \dots + \frac{a_{in}}{\tau_n^p} = (-1)^p x_{ip} \\ \vdots \\ \frac{a_{i1}}{\tau_1^n} + \frac{a_{i2}}{\tau_2^n} + \dots + \frac{a_{in}}{\tau_n^n} = (-1)^n x_{in} \end{cases} \quad (4.18)$$

Pour faciliter la lecture, on effectue le changement de variables suivant :

$$h_j = \frac{1}{\tau_j} \quad (4.19)$$

Le système S_{der} s'écrit alors

$$S_{der} \left\{ \begin{array}{l} \sum_{j=1}^n h_j^0 a_{ij} = (-1)^0 x_{i0} \\ \sum_{j=1}^n h_j^1 a_{ij} = (-1)^1 x_{i1} \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n h_j^p a_{ij} = (-1)^p x_{ip} \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n h_j^n a_{ij} = (-1)^n x_{in} \end{array} \right. \quad (4.20)$$

Malheureusement, le système obtenu n'est pas linéaire et sa résolution pourrait poser des difficultés. Aussi, nous cherchons à transformer ces équations de manière à obtenir un système linéaire.

Nous procédons d'abord à l'élimination des variables a_{ij} .

Commençons par éliminer tous les a_{i1} en soustrayant à chaque ligne p la ligne $p - 1$ préalablement multipliée par h_1 . Nous obtenons alors les n équations suivantes

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{j=2}^n h_j^0 (h_j - h_1) a_{ij} = (-1)^1 (x_{i1} + h_1 x_{i0}) \\ \vdots \\ \sum_{j=2}^n h_j^{p-1} (h_j - h_1) a_{ij} = (-1)^p (x_{ip} + h_1 x_{ip-1}) \\ \vdots \\ \sum_{j=2}^n h_j^{n-1} (h_j - h_1) a_{ij} = (-1)^n (x_{in} + h_1 x_{in-1}) \end{array} \right. \quad (4.21)$$

Notons que ce nouveau système est semblable au système précédant (il suffit d'effectuer un changement de variables : $b_{ij} = (h_j - h_1) a_{ij}$). Ainsi, une nouvelle itération permet d'éliminer a_{i2} .

L'équation 4.24 s'écrit donc

$$0 = x_{in} + \sigma_{n-1}x_{in-1} + \sigma_{n-2}x_{in-2} + \dots + \sigma_0x_{i0} \quad (4.26)$$

soit

$$\boxed{\sigma_{n-1}x_{in-1} + \sigma_{n-2}x_{in-2} + \dots + \sigma_0x_{i0} = -x_{in}} \quad (4.27)$$

En appliquant cette équation à tous les nœuds, on obtient n équations à n inconnues.

$$\begin{cases} x_{10}\sigma_0 + \dots + x_{1n-1}\sigma_{n-1} = -x_{1n} \\ \vdots \\ x_{n0}\sigma_0 + \dots + x_{nn-1}\sigma_{n-1} = -x_{nn} \end{cases} \quad (4.28)$$

Ce qui peut aussi s'écrire

$$\begin{pmatrix} x_{10} & \cdots & x_{1n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{n0} & \cdots & x_{nn-1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sigma_0 \\ \vdots \\ \sigma_{n-1} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} x_{1n} \\ \vdots \\ x_{nn} \end{pmatrix} \quad (4.29)$$

Les différents x_{ij} sont connus. Nous pouvons donc calculer tous les σ_i par diagonalisation de la matrice des x_{ij} .

Rappelons que l'on souhaite déterminer les constantes de temps et que $\frac{1}{\tau_i} = h_i$. Nous allons maintenant déterminer les h_i , à partir des σ_i .

Considérons le polynôme P de degré n et ayant comme racines h_1, \dots, h_n .

$$P_n(h) = \prod_{i=1}^n (h - h_i) \quad (4.30)$$

En développant cette expression, nous obtenons

$$\begin{aligned} P_n(h) &= h^n \\ &+ (-1) \sum_{i=1}^n h_i \cdot h^{n-1} \\ &+ (-1)^2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=i+1}^n h_i h_j \cdot h^{n-2} \\ &\vdots \\ &+ (-1)^n \prod_{i=1}^n h_i \end{aligned} \quad (4.31)$$

Ce qui peut aussi s'écrire

$$P_n(h) = h^n - \sigma_{n-1}h^{n-1} + \sigma_{n-2}h^{n-2} + \dots + (-1)^n \sigma_0 \quad (4.32)$$

Ainsi, pour obtenir les h_i , il faut déterminer les n racines du polynôme $P_n(h)$. Il existe différentes méthodes pour réaliser cette opération. Cependant, $P_n(h)$ n'est pas un polynôme quelconque. La particularité de ce polynôme nous a poussé à chercher une solution originale à ce problème classique. Dans le chapitre suivant, nous exposons quelques méthodes pour calculer les n racines du polynôme $P_n(h)$.

4.3.3 Calcul des a_i en l'absence de capacités de couplage

La première équation du système d'équations 4.23 obtenu après $n - 1$ itérations permet de calculer a_{in}

$$\begin{aligned} a_{in} \prod_{j=1}^{n-1} (h_n - h_j) &= (-1)^{n-1} (x_{in-1} + (h_1 + \dots + h_{n-1})x_{in-2} \\ &\quad + (h_1h_2 + \dots + h_{n-2}h_{n-1})x_{in-3} \\ &\quad + \dots \\ &\quad + h_{n-1} \dots h_1 x_{i0}) \end{aligned} \quad (4.33)$$

Or, le système S_{der} est symétrique par rapport aux permutations des indices de h_1, \dots, h_n d'où pour tout $k \in 1, \dots, n$

$$\begin{aligned} a_{ik} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n (h_k - h_j) &= (-1)^{n-1} (x_{in-1} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n h_j \cdot x_{in-2} \\ &\quad + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n \sum_{\substack{l=j \\ l \neq k}}^n h_j h_l \cdot x_{in-3} \\ &\quad + \dots \\ &\quad + \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n h_j x_{i0}) \end{aligned} \quad (4.34)$$

4.3.4 Cas général des réseaux ayant des capacités de couplage

En résumé, la méthode que nous proposons comporte quatre étapes :

- calcul des valeurs initiales des dérivées successives des nœuds
- détermination des coefficients $\sigma_0, \dots, \sigma_{n-1}$

- détermination des racines du polynôme $P_n(h)$
- calcul des coefficients a_{ij} pour un nœud i

Quand le réseau comporte des couplages capacitifs, le calcul des valeurs initiales des dérivées peut poser des problèmes. En effet, si l'on considère la loi des nœuds sur le nœud i :

$$G_i \cdot x_i(t) + C_i \cdot x'_i(t) = \sum_{j=0}^m G_{ij} \cdot x_j(t) + \sum_{j=0}^m C_{ij} \cdot x'_j(t) \quad (4.35)$$

Il n'est pas possible de calculer simplement la valeur $x'_i(0)$ car celle-ci dépend des $x'_j(0)$.

Dans cette section, nous proposons une technique permettant de ramener un réseau comportant des capacités de couplage à un réseau équivalent sans capacités de couplage.

Le système S_t peut s'écrire sous une forme matricielle

$$G \cdot X + C \cdot X' = 0 \quad (4.36)$$

où G est la matrice des conductances et C la matrice des capacités. En l'absence de capacités de couplage, la matrice C est diagonale. A contrario, la présence des capacités de couplage rend la matrice non diagonale.

Soit

$$\begin{pmatrix} G_1 & -G_{12} \cdots -G_{1n} - G_{1n+1} \cdots -G_{1m} \\ -G_{21} & G_2 & \cdots -G_{2n} - G_{2n+1} \cdots -G_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -G_{n1} - G_{n2} \cdots & G_n & -G_{nm+1} \cdots -G_{nm} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \\ x_{n+1}(t) \\ \vdots \\ x_m(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} C_1 & -C_{12} \cdots -C_{1n} - C_{1n+1} \cdots -C_{1m} \\ -C_{21} & C_2 & \cdots -C_{2n} - C_{2n+1} \cdots -C_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -C_{n1} - C_{n2} \cdots & C_n & -C_{nm+1} \cdots -C_{nm} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_1(t) \\ x'_2(t) \\ \vdots \\ x'_n(t) \\ x'_{n+1}(t) \\ \vdots \\ x'_m(t) \end{pmatrix} = 0 \quad (4.37)$$

Nous proposons de diagonaliser la matrice des capacités (C) (symétrique et réelle) par exemple en réalisant des combinaisons linéaires entre les lignes. Au cours de ces opérations, il faut effectuer les mêmes combinaisons linéaires sur la matrice G . Nous obtenons ainsi un

nouveau système :

$$\begin{pmatrix} G'_1 & -G'_{12} & \cdots & -G'_{1n} & -G'_{1n+1} & \cdots & -G'_{1m} \\ -G'_{21} & G'_2 & \cdots & -G'_{2n} & -G'_{2n+1} & \cdots & -G'_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -G'_{n1} & -G'_{n2} & \cdots & G'_n & -G'_{n+1} & \cdots & -G'_{3m} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \\ x_{n+1}(t) \\ \vdots \\ x_m(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} C'_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & C'_2 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & C'_n & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_1(t) \\ x'_2(t) \\ \vdots \\ x'_n(t) \\ x'_{n+1}(t) \\ \vdots \\ x'_m(t) \end{pmatrix} = 0 \tag{4.38}$$

que l'on peut écrire sous forme d'un système d'équations différentielles

$$S_{eq} \begin{cases} G'_1 \cdot x_1(t) + C'_1 \cdot x'_1(t) = \sum_{j=0}^m G'_{1j} \cdot x_j(t) \\ \vdots \\ G'_i \cdot x_i(t) + C'_i \cdot x'_i(t) = \sum_{j=0}^m G'_{ij} \cdot x_j(t) \\ \vdots \\ G'_n \cdot x_n(t) + C'_n \cdot x'_n(t) = \sum_{j=0}^m G'_{nj} \cdot x_j(t) \end{cases}$$

Sur ce système équivalent, il n'existe plus de couplages capacitifs entre les nœuds et il est possible de calculer les $x'_i(0)$ en fonction des $x_i(0)$.

4.3.5 Exemple

Nous allons appliquer la méthode directe d'évaluation de la fonction de transfert au réseau de la figure 4.3.

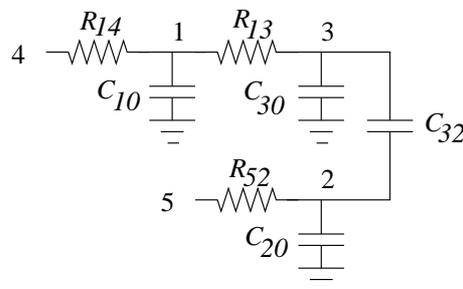


Figure 4.3: Exemple de réseau d'interconnexion

Le système d'équations caractérisant ce réseau peut s'écrire

$$\begin{pmatrix} G_1 & 0 & -G_3 & -G_{14} & 0 \\ 0 & G_2 & 0 & 0 & -G_2 \\ -G_3 & 0 & G_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \\ x_5(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} C_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C_2 & -C_{23} & 0 & 0 \\ 0 & -C_{23} & C_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_1(t) \\ x'_2(t) \\ x'_3(t) \\ x'_4(t) \\ x'_5(t) \end{pmatrix} = 0 \quad (4.39)$$

Dans un premier temps, nous appliquons la procédure que nous venons de voir pour éliminer les capacités de couplage.

La première étape de diagonalisation consiste à supprimer le terme $-C_{23}$ de la ligne 2 et de la ligne 3 en réalisant une combinaison linéaire entre les lignes 2 et 3.

$$C = \begin{pmatrix} C_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C_2 - \frac{C_{23}^2}{C_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.40)$$

Rappelons que les mêmes combinaisons linéaires sont réalisées sur la matrice G . Nous obtenons alors

$$G = \begin{pmatrix} G_1 & 0 & -G_3 & -G_{14} & 0 \\ -G_3 \cdot \frac{C_{23}}{C_3} & G_2 & G_3 \cdot \frac{C_{23}}{C_3} & 0 & -G_2 \\ -G'_{31} & G_2 \cdot \frac{C_{23}C_3}{C_2C_3 - C_{23}^2} & G_3 \cdot \frac{C_2C_3}{C_2C_3 - C_{23}^2} & 0 & -G_2 \cdot \frac{C_{23}C_3}{C_2C_3 - C_{23}^2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.41)$$

Ce qui peut s'écrire

$$\begin{cases} G_1 \cdot x_1(t) + C_1 \cdot x'_1(t) & = G_3 \cdot x_3(t) + G_{14} \cdot x_4(t) \\ G_2 \cdot x_2(t) + (C_2 - \frac{C_{23}^2}{C_3}) \cdot x'_2(t) & = G_3 \cdot \frac{C_{23}}{C_3} \cdot x_1(t) - G_3 \cdot \frac{C_{23}}{C_3} \cdot x_3(t) + G_2 \cdot x_5(t) \\ G_3 \cdot \frac{C_2C_3}{C_2C_3 - C_{23}^2} \cdot x_3(t) + C_3 \cdot x'_3(t) & = G_3 \cdot \frac{C_2C_3}{C_2C_3 - C_{23}^2} \cdot x_1(t) - G_2 \cdot \frac{C_{23}C_3}{C_2C_3 - C_{23}^2} \cdot x_2(t) + G_2 \cdot \frac{C_{23}C_3}{C_2C_3 - C_{23}^2} \cdot x_5(t) \end{cases} \quad (4.42)$$

Pour simplifier l'application numérique, l'unité prise en compte pour les capacités est le femtofarad et pour les résistances l'ohm.

$$\begin{cases} 0,4.x_1(t) + 10.x_1'(t) = 0,2.x_3(t) + 0,2.x_4(t) \\ 0,2.x_2(t) + 18,33.x_2'(t) = 0,16.x_1(t) - 0,16.x_3(t) + 0,2.x_5(t) \\ 0,654.x_3(t) + 60.x_3'(t) = 0,654.x_1(t) - 0,545.x_2(t) + 0,545.x_5(t) \end{cases} \quad (4.43)$$

Si l'on considère, par exemple, que le nœud d'entrée 4 est stable à V_{SS} et que le nœud 5 effectue une transition de V_{SS} vers V_{DD} , nous pouvons calculer la valeur des dérivées successives de nœuds. On suppose que la valeur initiale des signaux 1, 2 et 3 est V_{SS} . Pour l'application numérique, on considère $V_{DD} = 5V$ et $V_{SS} = 0V$.

$$\begin{cases} x_{10} = x_1(0) - a_{10} = 0 & V \\ x_{20} = x_2(0) - a_{20} = -5 & V \\ x_{30} = x_3(0) - a_{30} = 0 & V \\ x_{40} = x_4(0) = 0 & V \\ x_{50} = x_5(0) = 5 & V \end{cases} \quad (4.44)$$

Pour calculer les dérivées premières des différents signaux, nous appliquons les valeurs initiales au système 4.43. Ce qui donne

$$\begin{cases} x_{11} = 0 & V.(f_s)^{-1} \\ x_{21} = 1,09.10^{-1} & V.(f_s)^{-1} \\ x_{31} = 9,09.10^{-2} & V.(f_s)^{-1} \\ x_{41} = 0 & V.(f_s)^{-1} \\ x_{51} = 0 & V.(f_s)^{-1} \end{cases} \quad (4.45)$$

Puis, comme nous l'avons vu dans la section précédente, ces valeurs sont utilisées pour calculer les dérivées d'ordre 2 et 3

$$\begin{cases} x_{12} = 1,89.10^{-3} & V.(f_s)^{-2} \\ x_{22} = -2,01.10^{-3} & V.(f_s)^{-2} \\ x_{32} = -1,98.10^{-3} & V.(f_s)^{-2} \\ x_{42} = 0 & V.(f_s)^{-2} \\ x_{52} = 0 & V.(f_s)^{-2} \end{cases} \quad \begin{cases} x_{13} = -1,12.10^{-4} & V.(f_s)^{-3} \\ x_{23} = 5,59.10^{-5} & V.(f_s)^{-3} \\ x_{33} = 5,98.10^{-5} & V.(f_s)^{-3} \\ x_{43} = 0 & V.(f_s)^{-3} \\ x_{53} = 0 & V.(f_s)^{-3} \end{cases} \quad (4.46)$$

A partir de ces valeurs nous pouvons établir un système d'équations pour calculer les σ_i

$$\begin{cases} x_{10}\sigma_0 + x_{11}\sigma_1 + x_{12}\sigma_2 = -x_{13} \\ x_{20}\sigma_0 + x_{21}\sigma_1 + x_{22}\sigma_2 = -x_{23} \\ x_{30}\sigma_0 + x_{31}\sigma_1 + x_{32}\sigma_2 = -x_{33} \end{cases} \quad (4.47)$$

D'où la forme matricielle

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1,89 \cdot 10^{-3} \\ -5 & 1,09 \cdot 10^{-1} & -2,01 \cdot 10^{-3} \\ 0 & 9,09 \cdot 10^{-2} & -1,98 \cdot 10^{-3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sigma_0 \\ \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} -1,12 \cdot 10^{-4} \\ 5,59 \cdot 10^{-5} \\ 5,98 \cdot 10^{-5} \end{pmatrix} \quad (4.48)$$

La résolution de ce système matriciel donne

$$\sigma_0 = 7,27 \cdot 10^{-7} (f_s)^{-3}$$

$$\sigma_1 = 6,91 \cdot 10^{-4} (f_s)^{-2}$$

$$\sigma_2 = 6,18 \cdot 10^{-2} (f_s)^{-1}$$

Le calcul des h_i est effectué à partir du polynôme suivant :

$$P_3(h) = h^3 - \sigma_2 \cdot h^2 + \sigma_1 \cdot h - \sigma_0 \quad (4.49)$$

Ce polynôme a trois racines qui sont

$$h_1 = 1,1735 \cdot 10^{-3} (f_s)^{-1}$$

$$h_2 = 1,3010 \cdot 10^{-2} (f_s)^{-1}$$

$$h_3 = 4,7634 \cdot 10^{-3} (f_s)^{-1}$$

Finalement, nous pouvons calculer pour un nœud quelconque, par exemple le nœud 3, les coefficients des exponentielles

$$a_{31} = \frac{(-1)^3(x_{33} + (h_2 + h_3)x_{33} + h_2 \cdot h_3 \cdot x_{31})}{h_1(h_1 - h_3)(h_1 - h_2)}$$

$$a_{32} = \frac{(-1)^3(x_{33} + (h_1 + h_3)x_{33} + h_1 \cdot h_3 \cdot x_{31})}{h_2(h_2 - h_1)(h_2 - h_3)}$$

$$a_{33} = \frac{(-1)^3(x_{33} + (h_1 + h_2)x_{32} + h_1 \cdot h_2 \cdot x_{31})}{h_3(h_3 - h_1)(h_3 - h_2)}$$

Ce qui nous donne :

$$a_{31} = 3,209 \quad V$$

$$a_{32} = -2,99 \quad V$$

$$a_{33} = -0,219 \quad V$$

La fonction de sortie est alors :

$$x_3(t) = 3,209 \cdot e^{-t \cdot 1,1735 \cdot 10^{12}} - 2,99 * e^{-t \cdot 13,01 \cdot 10^{12}} - 0,219 * e^{-t \cdot 47,6 \cdot 10^{12}} V \quad (4.50)$$

4.4 Méthode indirecte

Nous avons vu, à la section 4.2, lors de la formulation du problème, qu'un réseau de résistances et de capacités peut être caractérisé par un système d'équations différentielles du premier ordre. Dans cette section, nous proposons une autre technique pour résoudre ce système d'équations différentielles. Cette méthode utilise la transformée de Laplace.

Rappelons que dans le domaine de Laplace le système 4.4 s'exprime sous la forme

$$S_l \begin{cases} G_1 \cdot X_1(p) + p \cdot C_1 \cdot X_1(p) = \sum_{j=0}^m G_{1j} \cdot X_j(p) + \sum_{j=0}^m p \cdot C_{1j} \cdot X_j(p) \\ \vdots \\ G_i \cdot X_i(p) + p \cdot C_i \cdot X_i(p) = \sum_{j=0}^m G_{ij} \cdot X_j(p) + \sum_{j=0}^m p \cdot C_{ij} \cdot X_j(p) \\ \vdots \\ G_n \cdot X_n(p) + p \cdot C_n \cdot X_n(p) = \sum_{j=0}^m G_{nj} \cdot X_j(p) + \sum_{j=0}^m p \cdot C_{nj} \cdot X_j(p) \end{cases} \quad (4.51)$$

Le système S_l peut aussi s'écrire sous la forme matricielle suivante

$$M \cdot X = 0 \quad (4.52)$$

où le vecteur X représente les tensions aux différents nœuds du circuit

$$X = \begin{pmatrix} X_1(p) \\ \vdots \\ X_l(p) \\ \vdots \\ X_n(p) \\ X_{n+1}(p) \\ \vdots \\ X_m(p) \end{pmatrix}$$

et où M est une matrice $m * m$ de polynômes de degré inférieur ou égal à 1.

$$M = \begin{pmatrix} G_1 + pC_1 & \cdots & -G_{l1} - pC_{l1} & \cdots & -G_{1n} - pC_{1n} & G_{1n+1} & \cdots & -G_{1m} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -G_{l1} - pC_{l1} & \cdots & G_l + pC_l & \cdots & -G_{ln} - pC_{ln} & G_{ln+1} & \cdots & -G_{lm} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -G_{n1} - pC_{n1} & \cdots & -G_{nl} - pC_{nl} & \cdots & G_n + pC_n & G_{nn+1} & \cdots & -G_{nm} \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

Rappelons que par convention les nœuds internes sont numérotés de 1 à l , les nœuds de sortie de $l + 1$ à n et les nœuds d'entrée de $n + 1$ à m .

Les entrées ont une tension constante. Aussi, $x'_i(t) = 0$ pour tout $i \in \{n + 1, \dots, m\}$. Ce qui explique que dans la matrice M les coefficients des colonnes $i \geq n + 1$ sont des polynômes de degré 0.

4.4.1 Triangularisation de la matrice

Pour résoudre ce système, nous commençons par triangulariser la matrice M (symétrique).

Appelons L_i la ligne i de la matrice M . La première étape consiste à éliminer le premier coefficient de chaque ligne en réalisant une combinaison linéaire avec la première ligne. Ainsi, nous effectuons l'opération suivante sur toutes les lignes dont le premier coefficient est non nul :

$$L_i = (G_1 + pC_1) * L_i + (G_{i1} + pC_{i1}) * L_1$$

Nous appelons M_1 la matrice résultante

$$M_1 = \begin{pmatrix} G_1 + pC_1 & -G_{12} - pC_{12} & \cdots & -G_{1m} \\ 0 & (G_1 + pC_1)(G_2 + pC_2) \\ & + (G_{21} + pC_{21})(-G_{12} - pC_{12}) & \cdots & (G_1 + pC_1)(-G_{2m}) \\ & & & + (G_{21} + pC_{21})(-G_{1m}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & (G_1 + pC_1)(-G_{n2} - pC_{n2}) & \cdots & (G_1 + pC_1)(-G_{nm}) \\ & + (G_{21} + pC_{21})(-G_{1n} - pC_{1n}) & \cdots & + (G_{12} + pC_{12})(-G_{1m}) \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \quad (4.53)$$

De la même manière, nous procédons à l'élimination des coefficients d'une colonne quelconque j en effectuant une combinaison linéaire avec la ligne j . Ainsi, nous obtenons la matrice triangulaire M_n

$$M_n = \begin{pmatrix} P_{11}(p) & P_{12}(p) & \cdots & P_{1n}(p) & \cdots & P_{1m}(p) \\ 0 & P_{22}(p) & \cdots & P_{2n}(p) & \cdots & P_{2m}(p) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & P_{nn}(p) & \cdots & P_{nm}(p) \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \quad (4.54)$$

A cette étape, nous connaissons l'expression de la tension du nœud de sortie n en fonction des entrées. Si le réseau possède plusieurs sorties et que l'on souhaite obtenir l'expression des autres nœuds de sortie, il faut diagonaliser la sous-matrice composée des lignes $l + 1$ à n et des colonnes $l + 1$ à n .

La diagonalisation passe également par des combinaisons linéaires entre les lignes de la matrice. On élimine le coefficient de la colonne j de la ligne i en effectuant une combinaison linéaire entre la ligne i et la ligne j . Nous obtenons ainsi une expression de la tension des nœuds de sortie en fonction des tensions des nœuds d'entrée.

$$\begin{pmatrix}
 P_{l+1l+1}(p) & 0 & \cdots & \cdots & 0 & P_{l+1n+1}(p) & \cdots & P_{l+1m}(p) \\
 0 & P_{l+2l+2}(p) & \ddots & \cdots & 0 & P_{l+2n+1}(p) & \cdots & P_{l+2m}(p) \\
 \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\
 \vdots & \ddots & \ddots & P_{n-1n-1}(p) & 0 & P_{n-1n+1}(p) & \cdots & P_{n-1m}(p) \\
 \vdots & \cdots & \ddots & 0 & P_{nn}(p) & P_{nn+1}(p) & \cdots & P_{nm}(p) \\
 0 & \cdots & \cdots & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\
 \vdots & & & & & & & \vdots \\
 0 & \cdots & \cdots & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0
 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}
 X_{l+1}(p) \\
 X_{l+2}(p) \\
 \vdots \\
 X_{n-1}(p) \\
 X_n(p) \\
 X_{n+1}(p) \\
 \vdots \\
 X_m(p)
 \end{pmatrix} = 0 \quad (4.55)$$

4.4.2 Décomposition en éléments simples

Considérons une sortie $s \in \{l+1, \dots, n\}$. D'après la matrice résultante de l'étape précédente, nous obtenons une expression de s sous la forme

$$P_{ss}(p) \cdot X_s(p) = \sum_{i=n+1}^m P_{si}(p) X_i(p) \quad (4.56)$$

où P_{ss} et P_{si} sont des polynômes. Nous pouvons remarquer que $\deg(P_{ss}) \geq \deg(P_{si}) + 1$. Ceci est dû au fait que, dans la matrice initiale, les coefficients des colonnes $n+1$ à m sont des polynômes de degrés 0, et que, en l'absence de liaison résistive avec une entrée, le coefficient correspondant est nul. Dans le cas où tous les polynômes des colonnes 1 à n de la matrice initiale sont de degré 1, le polynôme P_{nn} résultant pour la sortie n de la matrice finale est de degré 2^{n-1} . En effet, la première combinaison linéaire double le degré des polynômes. Il en est de même pour chacune des combinaisons linéaires. Comme $n-1$ combinaisons linéaires sont nécessaires pour obtenir les sorties en fonction des entrées alors P_{nn} est au maximum de degré 2^{n-1} . De même, lorsque plusieurs sorties existent, des combinaisons linéaires supplémentaires sont effectuées, augmentant encore le degré des polynômes.

Pour la suite, nous notons q le degré de P_{ss} . Si on isole la sortie en fonction des entrées, on obtient :

$$X_s(p) = \sum_{i=n+1}^m X_{si}(p) \quad (4.57)$$

avec

$$X_{si}(p) = \frac{P_{si}(p)}{P_{ss}(p)} X_i(p) \quad (4.58)$$

L'étape de décomposition en éléments simples consiste à réécrire chaque fraction de polynômes $\frac{P_{si}(p)}{P_{ss}(p)}$ sous forme d'une somme d'inverse de polynômes de degré un. Autrement dit, nous cherchons à déterminer les coefficients p_j et a_{sij} tels que

$$\frac{P_{si}(p)}{P_{ss}(p)} = \sum_{j=1}^q \frac{a_{sij}}{p - p_j} \quad (4.59)$$

Les coefficients p_j sont les racines du polynôme $P_{ss}(p)$ et nous verrons dans le chapitre suivant plusieurs méthodes permettant de calculer ces coefficients.

Une fois ces racines identifiées, nous pouvons écrire

$$P_{ss}(p) = \alpha \prod_{j=1}^q (p - p_j) \quad (4.60)$$

où α est le coefficient du terme d'ordre q de P_{ss} .

Nous cherchons maintenant à déterminer les coefficients a_{sij} tels que

$$\sum_{j=1}^q \frac{a_{sij}}{p - p_j} = \frac{P_{si}(p)}{\alpha \prod_{j=1}^q (p - p_j)} \quad (4.61)$$

Pour isoler le terme en a_{sik} , nous multiplions les deux membres par $p - p_k$

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^q \frac{a_{sij}}{p - p_j} (p - p_k) + a_{sik} = \frac{P_{si}(p)}{\alpha \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^q (p - p_j)} \quad (4.62)$$

d'où

$$a_{sik} = \frac{P_{si}(p_k)}{\alpha \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^q (p - p_j)} \quad (4.63)$$

Finalement, l'expression de la sortie s s'écrit

$$X_s(p) = \sum_{i=n+1}^m \sum_{j=1}^q \frac{a_{sij}}{p - p_j} X_i(p) \quad (4.64)$$

4.4.3 Inversion de Laplace

Pour trouver l'expression de s dans le domaine temporel, nous appliquons la transformée inverse de Laplace à la décomposition en éléments simples.

$$X_s(p) = \sum_{i=n+1}^m X_{si}(p) \quad (4.65)$$

d'où

$$x_s(t) = \sum_{i=n+1}^m x_{si}(t) \quad (4.66)$$

avec

$$x_{si}(t) = L^{-1}(X_{si}(p)) \quad (4.67)$$

et

$$X_{si}(p) = \sum_{j=1}^q \frac{a_{sij}}{p - p_j} X_i(p) \quad (4.68)$$

Les entrées sont dans un état stable à V_{DD} ou V_{SS} . Notons x_i cette valeur. Soit : $x_i(t) = x_i$ pour tout $i \in \{n+1, \dots, m\}$ d'où

$$X_i(p) = \frac{x_i}{p} \quad (4.69)$$

Ce qui donne

$$X_{si}(p) = \sum_{j=1}^q \frac{a_{sij}}{p - p_j} \frac{x_i}{p} \quad (4.70)$$

soit

$$x_{si}(t) - x_{si}(0) = \int_0^t \left(\sum_{j=1}^q a_{ij} (e^{-p_j \cdot t_0}) \cdot x_i \right) dt_0 \quad (4.71)$$

Ce qui donne :

$$x_{si}(t) - x_{si}(0) = \sum_{j=1}^q \frac{a_{ij}}{p_j} (e^{-p_j \cdot t} - 1) \cdot x_i \quad (4.72)$$

Si l'on suppose que le nœud s est dans l'état V_{SS} à l'instant 0

$$\begin{aligned} x_s(0) &= \sum_{i=n+1}^m x_{si}(0) \\ &= 0 \end{aligned} \quad (4.73)$$

d'où

$$x_s(t) = \sum_{i=n+1}^m \left(\sum_{j=1}^q \frac{a_{ij}}{p_j} (e^{-p_j \cdot t} - 1) \cdot x_i \right) \quad (4.74)$$

4.4.4 Exemple

Reprenons l'exemple de la figure 4.2.

L'équation matricielle suivante caractérise ce circuit :

$$\begin{pmatrix} (G_{41} + G_{13}) + p.C_{10} & 0 & -G_{13} & -G_{14} & 0 \\ 0 & G_{25} + p.(C_{25} + C_{32}) & -p.C_{23} & 0 & -G_{25} \\ G_{31} & -p.C_{32} & G_{31} + p.(C_{31} + C_{32}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} X_1(p) \\ X_2(p) \\ X_3(p) \\ X_4(p) \\ X_5(p) \end{pmatrix} = 0 \quad (4.75)$$

L'application numérique où l'unité des capacités est le femtofarad et l'unité des résistances l'ohm nous donne

$$\begin{pmatrix} 0,4 + 10p & 0 & -0,2 & -0,2 & 0 \\ 0 & 0,2 + 60p & -50p & 0 & -0,2 \\ -0,2 & -50p & 0,2 + 60p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} X_1(p) \\ X_2(p) \\ X_3(p) \\ X_4(p) \\ X_5(p) \end{pmatrix} = 0 \quad (4.76)$$

Une combinaison linéaire des lignes 1 et 3 permet d'éliminer le premier coefficient de la ligne 3

$$\begin{pmatrix} 0,4 + 10p & 0 & -0,2 & 0 & 0 \\ 0 & 0,2 + 60p & -50p & 0 & -0,2 \\ 0 & 20p + 500p^2 & -0,04 - 26p - 600p^2 & -0,04 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} X_1(p) \\ X_2(p) \\ X_3(p) \\ X_4(p) \\ X_5(p) \end{pmatrix} = 0 \quad (4.77)$$

Une combinaison linéaire des lignes 2 et 3 permet d'éliminer le second coefficient de la ligne 3. Nous obtenons alors X_3 en fonction de X_4 et X_5

$$(0,008 + 7,6p + 680p^2 + 11000p^3).X_3(p) = (0,008 + 2,4p).X_4(p) + p(4 + 100p).X_5(p) \quad (4.78)$$

soit

$$P_{33}.X_3(p) = P_{34}.X_4(p) + P_{35}.X_5(p) \quad (4.79)$$

CHAPITRE 4. ANALYSE DE RÉSEAUX DE RÉSISTANCES ET DE CAPACITÉS

Dans notre exemple, P_{33} est un polynôme de degré 3 dont les racines sont :

$$r_1 = -0,0476 (fs)^{-1}$$

$$r_2 = -0,0130 (fs)^{-1}$$

$$r_3 = -0,0012 (fs)^{-1}$$

et son coefficient d'ordre le plus important α vaut 11000.

Calculons le coefficient de P_{34}/P_{33} pour r_1 .

$$\begin{aligned} a_{41} &= \frac{P_{34}(r_1)}{\alpha(r_1 - r_2)(r_1 - r_3)} \\ &= -0,006 \text{ V} \end{aligned}$$

De la même manière, nous trouvons

$$a_{42} = 0,0051 \text{ V}$$

$$a_{43} = 0,0008 \text{ V}$$

$$a_{51} = 0,002 \text{ V}$$

$$a_{52} = 0,007 \text{ V}$$

$$a_{53} = -0,0007 \text{ V}$$

Nous obtenons donc :

$$\begin{aligned} X_3(p) &= \left(-\frac{0,006}{p + 0,0476} + \frac{0,0051}{p + 0,013} + \frac{0,0008}{p + 0,0012} \right) \cdot X_4(p) \\ &+ \left(\frac{0,002}{p + 0,0476} + \frac{0,007}{p + 0,013} + \frac{-0,0007}{p + 0,0012} \right) \cdot X_5(p) \end{aligned} \quad (4.80)$$

L'application à notre exemple, donne :

$$\begin{aligned} x_3(t) &= (0,126 \cdot (e^{-47,6 \cdot t \cdot 10^{12}} - 1) - 0,396 \cdot (e^{-13,0 \cdot t \cdot 10^{12}} - 1) - 0,73 \cdot (e^{-1,2 \cdot t \cdot 10^{12}} - 1)) \cdot x_4 \\ &+ (-0,043 \cdot (e^{-47,6 \cdot t \cdot 10^{12}} - 1) - 0,598 \cdot (e^{-13,0 \cdot t \cdot 10^{12}} - 1) + 0,642 \cdot (e^{-1,2 \cdot t \cdot 10^{12}} - 1)) \cdot x_5 \end{aligned} \quad (4.81)$$

Soit

$$\begin{aligned} x_3(t) &= (0,126 \cdot e^{-47,6 \cdot t \cdot 10^{12}} - 0,396 \cdot e^{-13,0 \cdot t \cdot 10^{12}} - 0,73 \cdot e^{-1,2 \cdot t \cdot 10^{12}} + 1) \cdot x_4 \\ &+ (-0,043 \cdot e^{-47,6 \cdot t \cdot 10^{12}} - 0,598 \cdot e^{-13,0 \cdot t \cdot 10^{12}} + 0,642 \cdot e^{-1,2 \cdot t \cdot 10^{12}}) \cdot x_5 \end{aligned} \quad (4.82)$$

Supposons que seul le nœud 5 effectue une transition de V_{SS} vers V_{DD} et que $V_{DD} = 5V$, nous obtenons

$$\begin{aligned} x_4 &= 0 \text{ V} \\ x_5 &= 5 \text{ V} \end{aligned} \quad (4.83)$$

Ce qui donne

$$x_3(t) = -0,219.e^{-47,6.t.10^{12}} - 2,99.e^{-13,0.t.10^{12}} + 3,209.e^{-1,2.t.10^{12}} \text{ V} \quad (4.84)$$

Nous obtenons la même équation qu'avec la méthode directe.

4.5 Conclusion

Nous avons présenté dans ce chapitre deux méthodes d'évaluation de la fonction de sortie d'un réseau quelconque de résistances et de capacités.

La première méthode, dite directe, utilise la valeur initiale des dérivées successives de l'expression des nœuds dans le domaine temporel.

La seconde méthode, dite indirecte, utilise une triangularisation d'une matrice de polynômes et une décomposition en éléments simples.

Ces deux méthodes, bien que différentes, ont une complexité proche et font appel, toutes les deux, à une recherche des racines d'un polynôme de degré n .

Chapitre 5

Méthodes de recherche des racines des polynômes

Sommaire

5.1	Introduction	70
5.2	Méthodes générales	71
5.3	Notre méthode de recherche des racines	75
5.4	Conclusion	78

Dans ce chapitre nous exposons plusieurs méthodes générales pour rechercher toutes les racines d'un polynôme de degré n . Puis, nous présentons la méthode que nous avons développée pour le cas particulier des polynômes qui nous intéressent.

5.1 Introduction

Nous avons vu, dans le chapitre précédent, deux méthodes d'évaluation de la fonction de sortie d'un réseau quelconque. Ces méthodes, bien que différentes, ont toutes deux besoins de déterminer les racines d'un polynôme P_n . Cependant, il ne s'agit pas de polynômes quelconques. Aussi bien dans la méthode directe qu'indirecte, les racines du polynôme sont les constantes de temps du réseau. Les polynômes de degré n dont nous cherchons les racines ont donc la particularité d'avoir n racines réelles et de même signe. De plus, nous pouvons supposer que les racines du polynôme P_n sont toutes différentes. En effet, la probabilité pour que, dans un réseau réel, deux constantes de temps soient exactement identiques est très faible sinon nulle.

Dans ce chapitre, nous présentons deux méthodes générales de recherche de racines des polynômes, à savoir les méthodes de Laguerre et de Newton-Raphson. Puis nous proposons une autre méthode que nous avons développée pour le cas spécifique qui nous intéresse. Toutes ces méthodes déterminent les racines du polynôme de manière itérative.

Soit P_n un polynôme de degré n

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^n a_i \cdot x^i \quad (5.1)$$

où a_i sont des coefficients réels.

Nous supposons que P_n possède n racines réelles positives distinctes $0 < r_1 < r_2 < \dots < r_n$

$$P_n(x) = a_n \prod_{i=1}^n (x - r_i) \quad (5.2)$$

Les polynômes de ce type possèdent des propriétés dont quelques unes sont utilisées dans les méthodes exposées ci-après.

Propriétés :

- Le polynôme $P'_n(x)$ possède $n - 1$ racines positives et distinctes. Ces racines sont les extremums de $P_n(x)$.
- Le polynôme $P''_n(x)$ possède $n - 2$ racines positives et distinctes. Ces racines sont les points d'inflexion de $P_n(x)$.
- Il existe un et un seul extremum entre deux racines successives de $P_n(x)$.

- Il existe un et un seul point d'inflexion entre deux extremums successifs de $P_n(x)$.
- Les racines, les extremums et les points d'inflexions de $P_n(x)$ sont distincts.

5.2 Méthodes générales

5.2.1 Laguerre

Cette méthode permet de trouver les n racines (éventuellement complexes) d'un polynôme quelconque. Elle comporte deux étapes.

La première étape utilise les dérivées d'ordre un et deux du polynôme pour calculer une approximation d'une racine. En partant d'une estimation x_0 d'une racine, cette méthode consiste à déterminer de manière itérative une suite x_1, \dots, x_q qui converge vers la racine.

Soit

$$P_n(x) = a_n \prod_{i=1}^n (x - r_i) \quad (5.3)$$

d'où

$$\log\left(\frac{P_n(x)}{a_n}\right) = \sum_{i=1}^n \log|x - r_i| \quad (5.4)$$

En calculant les deux premières dérivées de cette fonction, nous obtenons

$$\begin{aligned} G &= \frac{d \log(P_n(x))}{dx} = \frac{P'_n(x)}{P_n(x)} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{x - r_i} \\ H &= \frac{d^2 \log(P_n(x))}{dx^2} = \left[\frac{P'_n(x)}{P_n(x)} \right]^2 - \frac{P''_n(x)}{P_n(x)} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{(x - r_i)^2} \end{aligned} \quad (5.5)$$

Supposons que la racine r_1 soit à une distance a du point initial x_0 et que les autres racines soient à une distance b de ce même point.

$$x_0 - r_1 = a \quad x_0 - r_i = b \quad i \in \{2, 3, \dots, n\} \quad (5.6)$$

Nous pouvons maintenant écrire G et H en fonction de a et de b .

$$\begin{aligned} \frac{1}{a} + \frac{n-1}{b} &= G \\ \frac{1}{a^2} + \frac{n-1}{b^2} &= H \end{aligned} \quad (5.7)$$

Ce qui donne

$$a = \frac{n}{G \pm \sqrt{(n-1)(nH - G^2)}} \quad (5.8)$$

Ainsi, à partir d'une estimation x_i de la racine r_1 nous obtenons une meilleure approximation de r_1 , x_{i+1}

$$x_{i+1} = x_i - \frac{n}{G \pm \sqrt{(n-1)(nH - G^2)}} \quad (5.9)$$

le signe de la racine du dénominateur est choisi de manière à maximiser celui-ci.

Le critère de convergence est en général

$$\left| \frac{x_{i+1} - x_i}{x_i} \right| < \epsilon \quad (5.10)$$

où ϵ est la précision souhaitée pour la racine.

La seconde étape, dite étape de déflation, consiste à construire à partir de P_n un polynôme P_{n-1} tel que

$$P_{n-1}(x) \cdot (x - r_1) = P_n(x) \quad (5.11)$$

Si on note $P_{n-1}(x) = \sum_{i=0}^{n-1} b_i \cdot x^i$, les coefficients b_i sont déterminés de la façon suivante

$$\begin{cases} b_{n-1} &= a_n \\ b_{n-2} &= a_{n-1} + b_{n-1}r_1 \\ b_{n-3} &= a_{n-2} + b_{n-2}r_1 \\ &\vdots \\ b_0 &= a_1 + b_1r_1 \end{cases} \quad (5.12)$$

Ainsi, les racines de P_{n-1} sont r_2, \dots, r_n . Par conséquent, déterminer la deuxième racine de P_n , revient à trouver la première racine de P_{n-1} . Cette méthode permet donc de trouver les n racines d'un polynôme en exécutant itérativement les deux étapes : recherche d'une racine, déflation.

La déflation doit être utilisée avec précaution. En effet, la précision du calcul des coefficients des polynômes successifs dépend de la précision de la racine. Ainsi, à chaque étape de déflation, le calcul de la racine suivante perd un peu de sa précision.

5.2.2 Newton-Raphson

Cette méthode est également composée de deux étapes. La première étape calcule itérativement une série de valeurs qui converge vers une racine. La seconde étape est la déflation identique à celle que nous avons détaillée à la section précédente. La différence entre ces deux méthodes est la manière dont la suite est calculée.

Supposons que nous ayons trouvé un point x_0 proche d'une racine. Le développement limité de P_n au voisinage de x_0 est

$$P_n(x) = P_n(x_0) + P'_n(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}P''_n(x_0)(x - x_0)^2 + \dots \quad (5.13)$$

En négligeant les termes d'ordre supérieur ou égal à deux, nous obtenons une approximation de $P_n(x)$ par sa tangente au point x_0 .

$$P_{n \text{ app}}(x) = P_n(x_0) + P'_n(x_0)(x - x_0) \quad (5.14)$$

Cette droite coupe l'axe $y = 0$ en

$$x_1 = x_0 - \frac{P_n(x_0)}{P'_n(x_0)} \quad (5.15)$$

Ainsi, la suite décrite par $x_{n+1} = x_n - \frac{P_n(x_n)}{P'_n(x_n)}$ peut converger sous certaines conditions vers une racine de P_n .

Le critère de convergence est en général :

$$\left| \frac{x_{n+1} - x_n}{x_n} \right| < \epsilon \quad (5.16)$$

où ϵ est la précision souhaitée pour la racine.

La figure 5.1 illustre la méthode Newton-Raphson avec x_n comme point initial. x_{n+1} et x_{n+2} sont les points obtenus lors des deux premières itérations de la méthode.

Une fois une racine identifiée, on effectue une déflation comme dans la méthode de Laguerre. Le procédé est alors réitéré sur P_{n-1} pour trouver une autre racine, et ainsi de suite.

La méthode de Newton-Raphson est une méthode générale pour déterminer le zéro d'une fonction quelconque f . Cependant, la méthode ne converge que dans certaines conditions et le choix de la solution initiale influe de manière significative sur la convergence. Par exemple, si z est un zéro de la fonction f et $f'(z) = 0$, la convergence de la méthode n'est pas assurée.

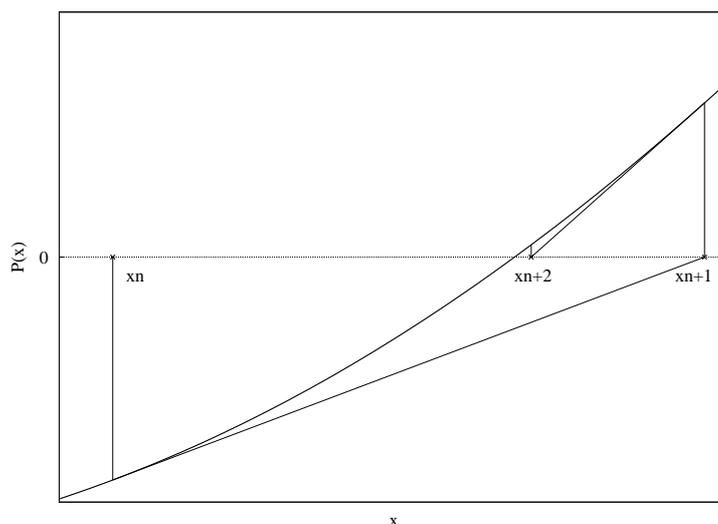


Figure 5.1: Newton-Raphson

En fait, il est extrêmement difficile d'énoncer une condition nécessaire et suffisante pour que la méthode de Newton-Raphson converge à partir d'un point x_0 . Cependant, dans le cas particulier des polynômes qui nous intéressent, nous savons que toutes les racines sont positives et distinctes les unes des autres. Dans ce cas, on peut facilement démontrer que la méthode de Newton-Raphson converge si la condition suivante est respectée :

Soit x_0 une estimation de la racine r_i

Si $x_0 < r_i$ alors la suite x_1, \dots, x_n converge vers r_i si :

$\forall x \in [x_0, r_i[, f(x) \neq 0$ (il n'existe pas d'autres racines entre x_0 et r_i)

et $\forall x \in [x_0, r_i[, f(x) \cdot f''(x) \geq 0$

et $\forall x \in [x_0, r_i[, f(x) \cdot f'(x) < 0$

Si $x_0 > r_i$ alors la suite x_1, \dots, x_n converge vers r_i si :

$\forall x \in [x_0, r_i[, f(x) \neq 0$ (il n'existe pas d'autres racines entre x_0 et r_i)

et $\forall x \in [x_0, r_i[, f(x) \cdot f''(x) \leq 0$

et $\forall x \in [x_0, r_i[, f(x) \cdot f'(x) > 0$

Ainsi, pour le polynôme P_n les conditions de convergence sont assurées pour l'intervalle $[0, r_1[$ où r_1 est la plus petite racine du polynôme. De ce fait, en choisissant 0 comme solution initiale, la suite x_n converge vers la racine la plus petite de P_n . Puis, en effectuant une déflation, nous construisons le polynôme P_{n-1} qui possède les mêmes propriétés que P_n . Ainsi, sur P_{n-1} , en partant de 0, la suite x_n converge vers la plus petite racine de P_{n-1} , c'est à dire la seconde

racine de P_n et ainsi de suite.

Cette méthode permet donc de trouver toutes les racines de P_n dans l'ordre croissant. Toutefois, l'étape de déflation pose les mêmes problèmes de perte de précision que pour la méthode de Laguerre.

5.3 Notre méthode de recherche des racines

Les méthodes précédentes, basées sur la déflation, ont pour principal inconvénient la perte de précision due à la succession des étapes de déflation. En effet, pour obtenir les n racines d'un polynôme de degré n il faut construire à partir de P_n une suite de polynômes $P_{1,n-1}, P_{2,n-2}, \dots, P_{n-1,1}$ définie par :

$$P_{i,n-i} = \frac{P_{i-1,n-i+1}}{x-r_i} \text{ pour tout } i \in \{1, \dots, n-1\} \text{ où } r_i \text{ est une racine de } P_n.$$

Dans cette section, nous proposons une autre méthode de recherche des racines d'un polynôme. Le but de cette nouvelle méthode est de limiter le nombre de déflations successives.

Considérons le polynôme P_n ayant comme racines r_1, \dots, r_n telles que $0 < r_1 < \dots < r_n$. Supposons que la racine r_i est connue. Nous cherchons à déterminer la racine r_{i+1} et à cette fin nous souhaitons utiliser la méthode de Newton-Raphson.

Soit $P_{i,n-1}$ le polynôme de degré $n-1$ résultant de la déflation de P_n par r_i :

$$P_{i,n-1} = \frac{P_n}{x-r_i} \tag{5.17}$$

Sur ce polynôme $P_{i,n-1}$, nous pouvons assurer que $r_i < r_{i+1}$ et qu'il n'existe pas d'autres racines entre r_i et r_{i+1} . Cependant, les deux autres conditions de convergence que nous avons énoncées ne sont pas forcément satisfaites.

La figure 5.2 montre un polynôme de degré 4 (P_4) et le polynôme ($P_{3,3}$) issu de la déflation de P_4 par la racine r_3 .

Alors nous cherchons à construire une fonction $f_i(x)$ ayant les mêmes zéros que le polynôme $P_{i,n-1}$ et uniquement ceux-ci telle que les conditions de convergence soient satisfaites sur cette fonction. Nous proposons

$$f_i(x) = e^{\alpha_i \cdot x} \cdot P_{i,n-1}(x) \tag{5.18}$$

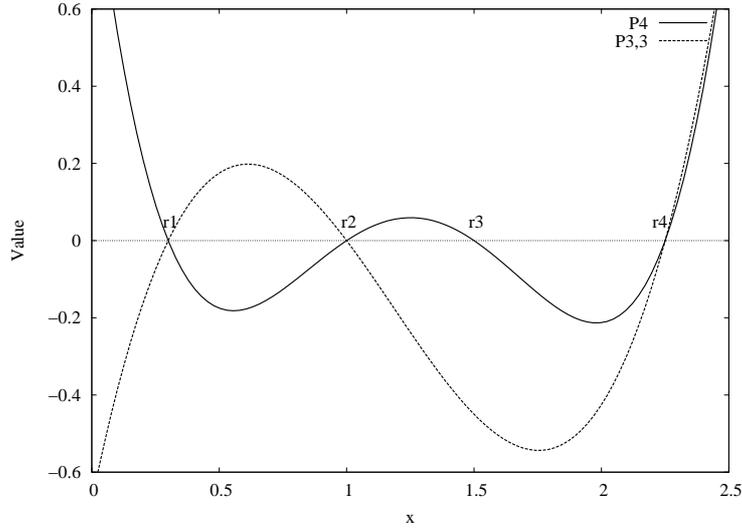


Figure 5.2: Un polynôme de degré 4 (P_4) et le polynôme de degré 3 ($P_{3,3}$) issu de la déflation de P_4 par r_3

Ainsi

$$\begin{aligned} f'_i(x) &= \alpha_i \cdot e^{\alpha_i \cdot x} \cdot P_{i,n-1}(x) + e^{\alpha_i \cdot x} \cdot P'_{i,n-1}(x) \\ &= e^{\alpha_i \cdot x} (\alpha_i \cdot P_{i,n-1}(x) + P'_{i,n-1}(x)) \end{aligned} \quad (5.19)$$

D'où $f_i(r_i) \cdot f'_i(r_i) < 0$ équivaut à :

$$e^{2\alpha_i \cdot r_i} P_{i,n-1}(r_i) (\alpha_i \cdot P_{i,n-1}(r_i) + P'_{i,n-1}(r_i)) < 0 \quad (5.20)$$

soit

$$\alpha_i < -\frac{P'_{i,n-1}(r_i)}{P_{i,n-1}(r_i)} \quad (5.21)$$

De même

$$\begin{aligned} f''_i(x) &= \alpha_i \cdot e^{\alpha_i \cdot x} (\alpha_i \cdot P_{i,n-1}(x) + P'_{i,n-1}(x)) + e^{\alpha_i \cdot x} (\alpha_i \cdot P'_{i,n-1}(x) + P''_{i,n-1}(x)) \\ &= e^{\alpha_i \cdot x} (\alpha_i^2 \cdot P_{i,n-1}(x) + 2 \cdot \alpha_i \cdot P'_{i,n-1}(x) + P''_{i,n-1}(x)) \end{aligned} \quad (5.22)$$

d'où $f_i(r_i) \cdot f''_i(r_i) \geq 0$ équivaut à

$$e^{2\alpha_i \cdot x} P_{i,n-1}(r_i) (\alpha_i^2 \cdot P_{i,n-1}(r_i) + 2 \cdot \alpha_i \cdot P'_{i,n-1}(r_i) + P''_{i,n-1}(r_i)) \geq 0 \quad (5.23)$$

soit

$$P_{i,n-1}^2(r_i) (\alpha_i - a_1) (\alpha_i - a_2) \geq 0 \quad (5.24)$$

avec

$$\begin{aligned}
 a_1 &= -\frac{P'_{i,n-1}(r_i) - \sqrt{P'^2_{i,n-1}(r_i) - P_{i,n}(r_i)P''_{i,n-1}(r_i)}}{P_{i,n-1}(r_i)} \\
 a_2 &= -\frac{P'_{i,n-1}(r_i) + \sqrt{P'^2_{i,n-1}(r_i) - P_{i,n}(r_i)P''_{i,n-1}(r_i)}}{P_{i,n-1}(r_i)}
 \end{aligned}
 \tag{5.25}$$

La figure 5.3 montre la courbe de l'équation $P^2_{i,n-1}(\alpha_i - a_1)(\alpha_i - a_2)$.

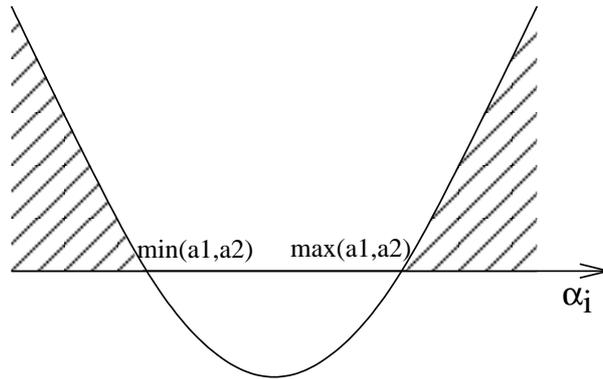


Figure 5.3: Courbe de l'équation $P^2_{i,n-1}(\alpha_i - a_1)(\alpha_i - a_2)$

L'inéquation 5.24 est vérifiée si

$$\alpha_i \leq \min(a_1, a_2) \text{ ou } \alpha_i \geq \max(a_1, a_2)
 \tag{5.26}$$

Comme on a déjà une condition d'infériorité, nous ne conservons que

$$\begin{aligned}
 \alpha_i &\leq -\frac{P'_{i,n-1}(r_i) + \sqrt{P'^2_{i,n-1}(r_i) - P_{i,n}(r_i)P''_{i,n-1}(r_i)}}{P_{i,n-1}(r_i)} & \text{si } P_{i,n-1}(r_i) > 0 \\
 \alpha_i &\leq -\frac{P'_{i,n-1}(r_i) - \sqrt{P'^2_{i,n-1}(r_i) - P_{i,n}(r_i)P''_{i,n-1}(r_i)}}{P_{i,n-1}(r_i)} & \text{si } P_{i,n-1}(r_i) < 0
 \end{aligned}
 \tag{5.27}$$

Ainsi, pour chaque racine r_i , nous pouvons déterminer α_i pour que les conditions de convergence soient satisfaites pour $f_i(r_i)$.

La figure 5.4 montre un polynôme de degré 4 (P_4), le polynôme issu de la déflation de P_4 par la racine r_3 ($P_{3,3}$) et la fonction $f_3(x) = e^{\alpha_3 \cdot x} P_{3,3}(x)$.

Cette méthode est plus complexe que Newton-Raphson mais sa précision est plus grande puisque que chaque racine est calculée sur un polynôme ayant subit une seule déflation à partir de P_n .

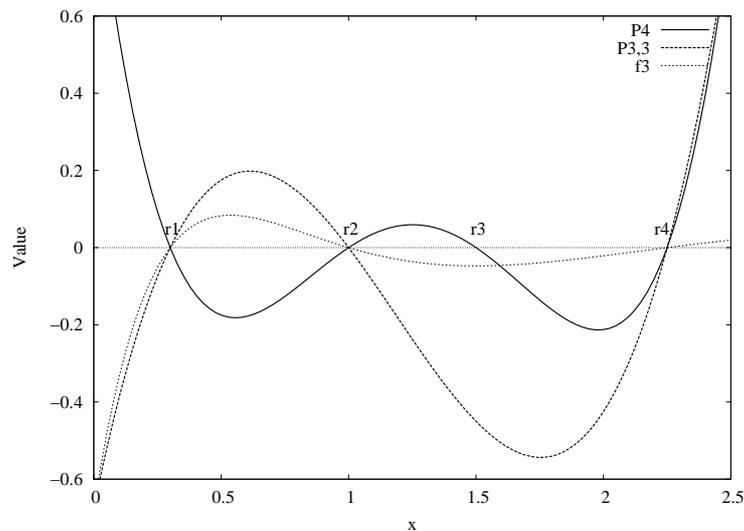


Figure 5.4: Polynômes P_4 , $P_{3,3}$ et fonction $f_3(x) = e^{\alpha_3 \cdot x} P_{3,3}(x)$

5.4 Conclusion

Nous avons exposé dans ce chapitre deux méthodes générales de recherche des racines d'un polynôme quelconque à savoir les méthodes Laguerre et Newton-Raphson. Ensuite, nous avons présenté une méthode spécifique aux polynômes à racines réelles et de même signe, basée sur la méthode Newton-Raphson. Cette méthode présente l'avantage de ne pas nécessiter des déflations successives du polynôme initial.

Chapitre 6

Réduction de réseaux de résistances et de capacités

Sommaire

6.1	Introduction	80
6.2	Choix du modèle simplifié	80
6.3	Détermination des paramètres des modèles simplifiés	85
6.4	Conclusion	89

A partir de la fonction de sortie obtenue par les méthodes décrites au chapitre 4, nous proposons une méthode pour obtenir un schéma simplifié approximant le réseau initial. Ce chapitre décrit cette méthode et les approximations sur lesquelles nous nous appuyons.

6.1 Introduction

Nous avons vu, dans le chapitre 4, l'étape *d'analyse* de notre méthode de réduction.

Dans ce chapitre, nous présentons, la méthode de *réduction* proprement dite. Dans un premier temps, nous proposons un modèle simplifié pour un réseau de résistances et de capacités. Nous tentons de justifier intuitivement le choix de ce modèle. Ensuite, nous expliquons comment déterminer les paramètres du schéma simplifié.

6.2 Choix du modèle simplifié

6.2.1 Modèle simplifié de la victime

Considérons un réseau de résistances et de capacités par exemple une chaîne constituée de n nœuds représentée par la figure 6.1. La longueur d'une chaîne est le nombre d'éléments résistifs compris entre l'entrée et la sortie de la chaîne.

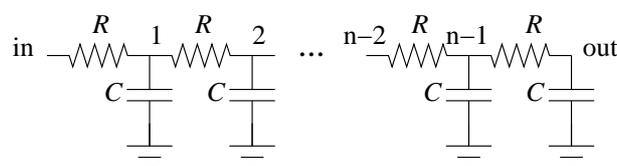


Figure 6.1: Chaîne de résistances et de capacités

Nous savons que lorsque l'entrée d'une chaîne constituée de n nœuds effectue une transition, l'expression du nœud de sortie *out* de la chaîne est une somme de n exponentielles. Les coefficients et les constantes de temps de ces exponentielles définissent la forme de transition du nœud *out*. La valeur de ces coefficients dépend évidemment de la valeur de l'ensemble des résistances et des capacités du circuit.

La figure 6.2 montre deux exemples de simulation sur deux chaînes de 3 nœuds. Dans ces deux chaînes, les valeurs des résistances sont identiques mais les capacités ont des valeurs différentes. On voit sur cet exemple que la variation de la valeur des capacités (ou des résistances) influence de manière significative la pente de la transition du nœud de sortie.

La figure 6.3 montre la transition du nœud de sortie de deux chaînes composées de six nœuds.

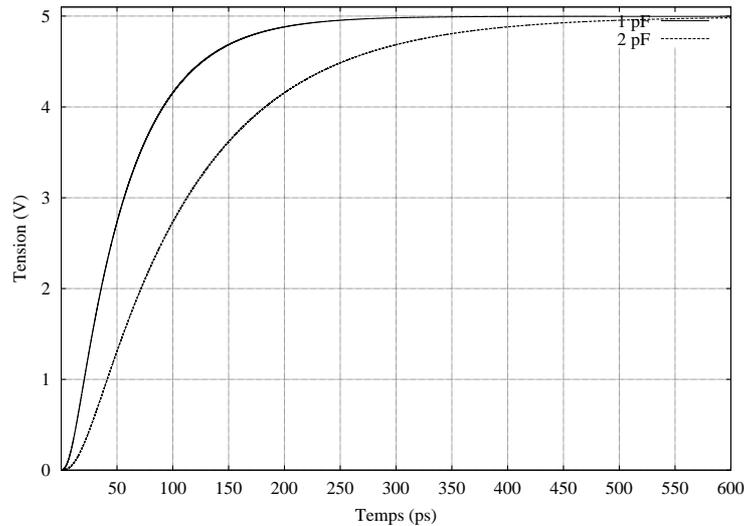


Figure 6.2: Simulation électrique de chaînes composées de trois nœuds pour des capacités à la masse valant $1pF$ et $2pF$

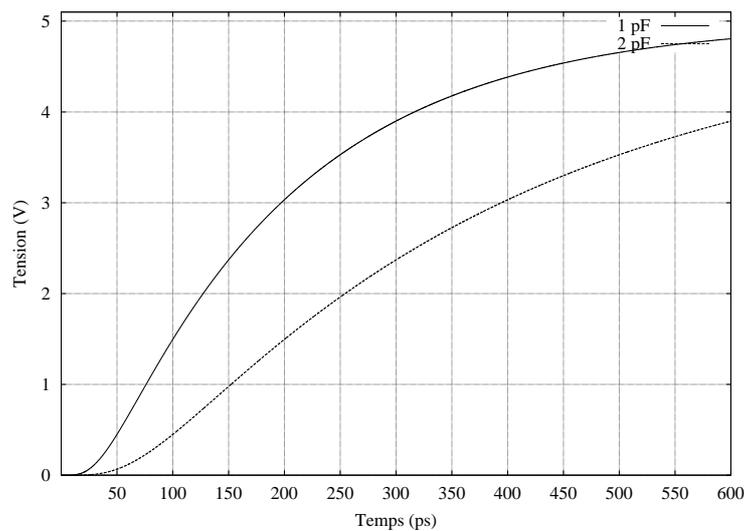


Figure 6.3: Simulation électrique de chaînes composées de six nœuds pour des capacités à la masse valant $1pF$ et $2pF$

Ici encore nous avons fait varier la valeur des capacités. Nous constatons évidemment une variation de la pente de la transition du nœud de sortie. Cependant, nous pouvons remarquer que pendant un long moment la tension du nœud de sortie reste proche de V_{SS} . Ceci est dû au fait que dans une chaîne de six nœuds les cinq premières dérivées de l'expression du nœud de sortie sont nulles à l'instant initial. La transition du nœud de sortie est donc caractérisée par

une pente et un délai pendant lequel la variation de la tension du nœud est négligeable.

Fort de cette observation, nous proposons de modéliser le signal victime d'un réseau quelconque de résistances et de capacités par un retard pur δ_v suivi d'une forme exponentielle, comme le montre le figure 6.4. Nous utilisons une résistance et une capacité pour modéliser la

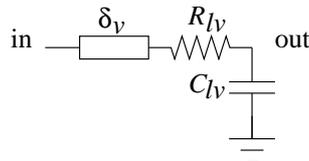


Figure 6.4: Schéma simplifié de la victime

raideur de la pente de l'exponentielle.

La simulation de la transition du nœud *out* de la figure 6.4 lorsque le nœud d'entrée effectue une transition à l'instant 0 est représentée à la figure 6.5

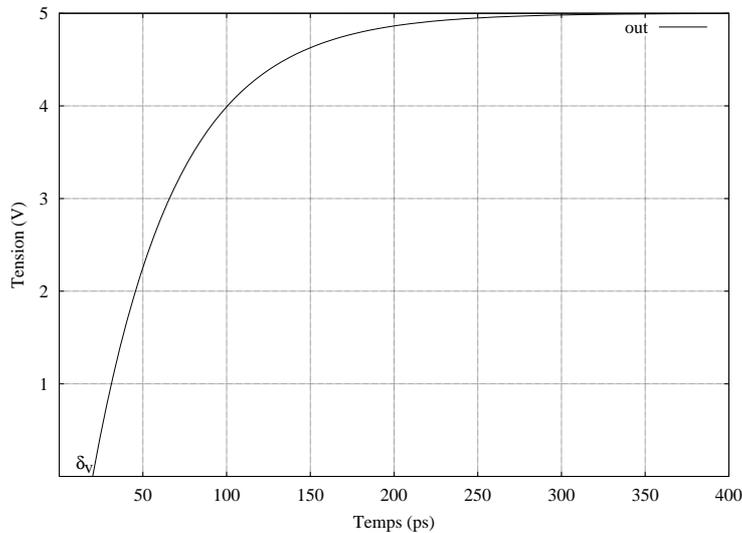


Figure 6.5: Simulation du schéma simplifié de la victime

Lorsque *in* effectue une transition de V_{SS} vers V_{DD} , la tension du nœud de sortie du modèle de la victime est

$$\hat{x}_{out}(t) = \begin{cases} 0 & \text{pour } t \in [0, \delta_v] \\ V_{DD} \cdot (1 - e^{-\frac{(t-\delta_v)}{\tau_v}}) & \text{pour } t \in [\delta_v, +\infty[\end{cases} \quad (6.1)$$

6.2.2 Modèle de l'agresseur

Dans sa thèse, Fabrice Ilponce modélise chaque agresseur actif a_i par une source de courant de forme $I_{ai}e^{-\frac{t}{\tau_{ai}}}$ où I_{ai} est l'amplitude du courant et τ_{ai} une constante de temps. Ce modèle présente l'avantage d'être très simple et additif. En effet, les courants injectés par plusieurs agresseurs actifs s'ajoutent les uns aux autres. Nous avons choisi d'adopter le même modèle. Cependant, la prise en compte des résistances d'interconnexion nous pousse à apporter une modification à ce modèle.

Considérons une victime modélisée par une chaîne de résistances et de capacités agressée par un agresseur également modélisé par une chaîne (cf. figure 6.6).

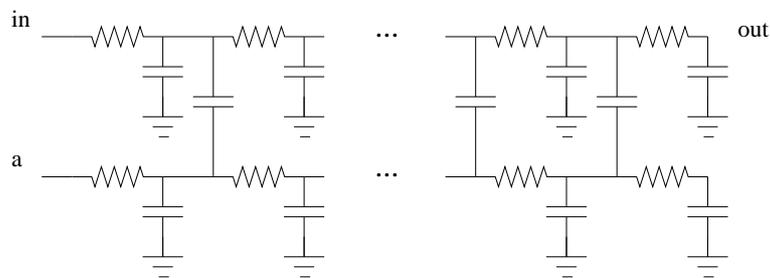


Figure 6.6: Chaînes de résistances et de capacités couplées

La figure 6.7 montre deux exemples de simulation de la tension de sortie d'une chaîne victime agressée par un agresseur.

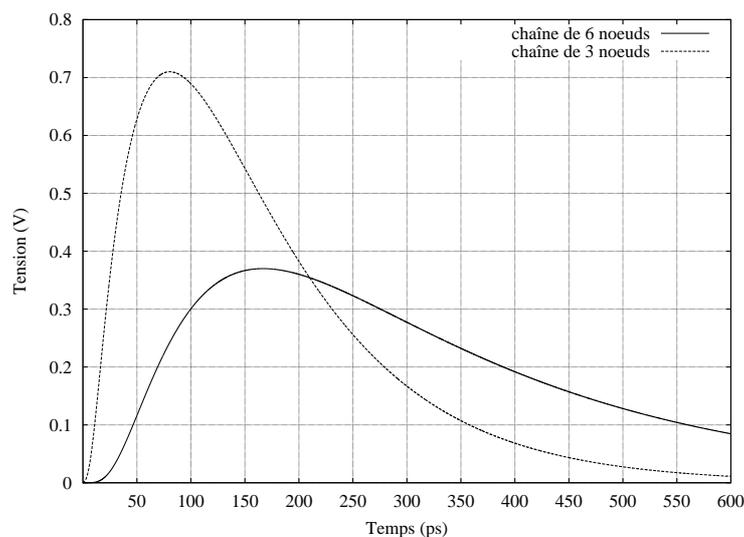


Figure 6.7: Bruit de diaphonie dû à la transition de l'agresseur

Comme dans le cas d'une transition simple, nous pouvons constater qu'ici aussi le bruit sur la victime ne devient significatif qu'après un certain délai. Aussi, nous proposons d'inclure un délai δ_a au modèle de source de courant proposé par Fabrice Ilponse. L'expression de la source de courant est alors $I_{ai} e^{-\frac{t-\delta_{ai}}{\tau_{ai}}}$.

La figure 6.8 représente le schéma simplifié de la figure 6.6 de la victime en présence de l'agresseur. Nous proposons donc de modéliser un réseau quelconque de résistances et de capacités comportant plusieurs agresseurs actifs par le schéma 6.9.

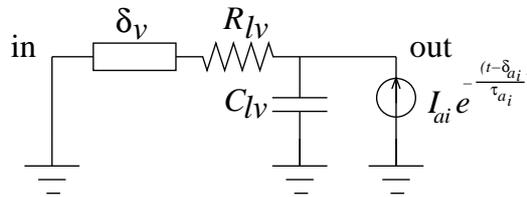


Figure 6.8: Schéma simplifié du nœud de sortie de la victime en présence de l'agresseur actif a_i

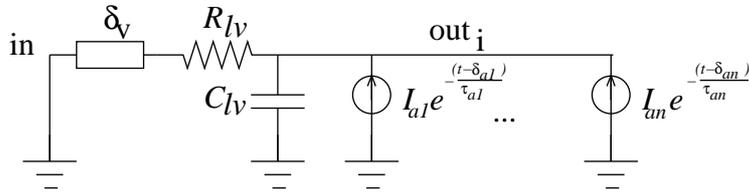


Figure 6.9: Schéma simplifié du nœud de sortie de la victime en présence de n agresseurs actifs

La tension du nœud victime *out* agressé par un agresseur modélisé par une source de courant est (détail en annexe C) :

$$\hat{x}_{out}(t) = \begin{cases} 0 & \text{pour } t \in [0, \delta_a] \\ \frac{I_a \tau_a}{C_{lv}} (1 - e^{-\frac{t-\delta_a}{\tau_a}}) & \text{pour } t \in [\delta_a, \delta_a + \delta_v] \\ \frac{I_a \tau_a}{C_{lv}} \left[\left(1 - \frac{\tau_a}{\tau_a - \tau_v} e^{-\frac{\delta_v}{\tau_a}}\right) e^{-\frac{t-(\delta_a+\delta_v)}{\tau_v}} + \frac{\tau_v}{\tau_a - \tau_v} e^{-\frac{t-\delta_a}{\tau_a}} \right] & \text{pour } t \in [\delta_a + \delta_v, +\infty[\end{cases} \quad (6.2)$$

6.3 Détermination des paramètres des modèles simplifiés

6.3.1 Détermination des paramètres de la victime

Soit $x_{out}(t)$, l'expression du nœud de sortie *out* d'un réseau RC quelconque composé de n nœuds, obtenue par une méthode d'évaluation de la fonction de sortie. Lorsque l'entrée effectue une transition de V_{SS} vers V_{DD} , x_{out} vaut

$$x_{out}(t) = \sum_{i=1}^n a_i e^{-h_i \cdot t} + V_{DD} \quad (6.3)$$

Nous avons vu que l'expression de sortie *out* obtenue par le schéma simplifié de la victime lorsque l'entrée effectue une transition est :

$$\hat{x}_{out}(t) = \begin{cases} 0 & \text{pour } t \in [0, \delta_v] \\ V_{DD} \cdot (1 - e^{-\frac{(t-\delta_v)}{\tau_v}}) & \text{pour } t \in [\delta_v, +\infty[\end{cases} \quad (6.4)$$

où $\tau_v = R_{lv} C_{lv}$

La figure 6.10 donne une illustration des courbes initiales et simplifiées.

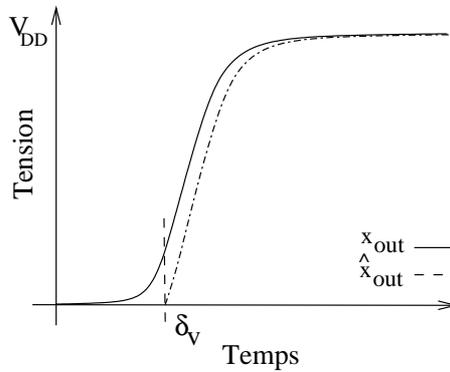


Figure 6.10: Exemple de courbes initiales et simplifiées

Nous cherchons à déterminer τ_v et δ_v tels que \hat{x}_{out} soit une approximation de x_{out} .

L'approximation d'une fonction f par une fonction g passe par la définition et la mesure d'une distance entre f et g . Nous proposons de définir la distance entre deux fonctions par :

$$d(f, g) = \int_0^{+\infty} (f(t) - g(t))^2 \cdot dt \quad (6.5)$$

On dit alors que g est une approximation de f si et seulement si la distance entre f et g est

minimale. Nous cherchons donc à définir $\hat{x}_{out}(t)$ telle que $d(\hat{x}_{out}, x_{out})$ soit minimale.

$$\begin{aligned} d(\hat{x}_{out}, x_{out}) &= \int_0^{+\infty} (x_{out}(t) - \hat{x}_{out}(t))^2 . dt \\ &= \int_0^{\delta_v} \left(\sum_{i=1}^n a_i e^{-h_i t} + V_{DD} \right)^2 . dt + \int_{\delta_v}^{+\infty} \left(\sum_{i=1}^n a_i e^{-h_i t} - V_{DD} . e^{-\frac{(t-\delta_v)}{\tau_v}} \right)^2 . dt \end{aligned} \quad (6.6)$$

Le développement des calculs intermédiaires est en annexe D. Voici le résultat final de $d(\hat{x}_{out}, x_{out})$.

$$\begin{aligned} d(\hat{x}_{out}, x_{out}) &= \sum_{i=1}^n \frac{a_i^2}{2h_i} + \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{a_i a_j}{h_i + h_j} + V_{DD}^2 \delta_v + 2V_{DD} \sum_{i=1}^n \frac{a_i}{h_i} e^{-h_i \delta_v} \\ &\quad - 2V_{DD} \sum_{i=1}^n \frac{a_i}{h_i} + \frac{V_{DD}^2 \tau_v}{2} - 2.V_{DD} \sum_{i=1}^n \frac{a_i \tau_v}{1 + h_i \tau_v} e^{-h_i \delta_v} \end{aligned} \quad (6.7)$$

Minimiser $d(\hat{x}_{out}, x_{out})$ par rapport à δ_v et τ_v revient à résoudre un système de deux équations

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial \delta_v} d(\hat{x}_{out}, x_{out}) = F_1(\delta_v, \tau_v) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial \tau_v} d(\hat{x}_{out}, x_{out}) = F_2(\delta_v, \tau_v) = 0 \end{cases} \quad (6.8)$$

On obtient une expression de F_1 et F_2 en dérivant l'expression de $d(\hat{x}_{out}, x_{out})$ obtenue en 6.7.

$$\begin{aligned} F_1(\delta_v, \tau_v) &= V_{DD}^2 - 2.V_{DD} \sum_{i=1}^n \frac{a_i}{1 + h_i \tau_v} e^{-h_i \delta_v} \\ F_2(\delta_v, \tau_v) &= \frac{V_{DD}^2}{2} - 2.V_{DD} \sum_{i=1}^n \frac{a_i}{(1 + h_i \tau_v)^2} e^{-h_i \delta_v} \end{aligned} \quad (6.9)$$

Le système d'équations défini ci-dessus est non linéaire. La résolution de ce système passe par une linéarisation. Nous utilisons la méthode de Newton-Raphson généralisée à des systèmes de n équations à n variables. Cette méthode utilise la matrice Jacobienne des fonctions F_1 et F_2 . On trouve alors une approximation de la solution de manière itérative en partant d'une estimation initiale de la solution $(\delta_{v_0}, \tau_{v_0})$ et en construisant une suite $(\delta_{v_1}, \tau_{v_1}), \dots, (\delta_{v_n}, \tau_{v_n})$ qui converge vers la solution. A partir d'un élément de la suite, l'élément suivant est construit

en résolvant l'équation matricielle suivante :

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial \delta_v}(\delta_{v_i}, \tau_{v_i}) & \frac{\partial F_1}{\partial \tau_v}(\delta_{v_i}, \tau_{v_i}) \\ \frac{\partial F_2}{\partial \delta_v}(\delta_{v_i}, \tau_{v_i}) & \frac{\partial F_2}{\partial \tau_v}(\delta_{v_i}, \tau_{v_i}) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \delta_{v_{i+1}} - \delta_{v_i} \\ \tau_{v_{i+1}} - \tau_{v_i} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} F_1(\delta_{v_i}, \tau_{v_i}) \\ F_2(\delta_{v_i}, \tau_{v_i}) \end{pmatrix} \quad (6.10)$$

où

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_1}{\partial \delta_v} &= 2.V_{DD} \sum_{i=1}^n \frac{a_i h_i}{1 + h_i \tau_v} e^{-h_i \delta_v} & \frac{\partial F_1}{\partial \tau_v} &= 2.V_{DD} \sum_{i=1}^n \frac{a_i h_i}{(1 + h_i \tau_v)^2} e^{-h_i \delta_v} \\ \frac{\partial F_2}{\partial \delta_v} &= 2.V_{DD} \sum_{i=1}^n \frac{a_i h_i}{(1 + h_i \tau_v)^2} e^{-h_i \delta_v} & \frac{\partial F_2}{\partial \tau_v} &= 4.V_{DD} \sum_{i=1}^n \frac{a_i h_i}{(1 + h_i \tau_v)^3} e^{-h_i \delta_v} \end{aligned} \quad (6.11)$$

6.3.2 Détermination des paramètres de l'agresseur

Soit x_{out} l'expression du nœud de sortie obtenue par une des méthodes d'évaluation de la fonction de sortie agressé par un agresseur a qui effectue une transition de V_{SS} vers V_{DD} .

$$x_{out}(t) = \sum_{i=1}^n a_i e^{-h_i \cdot t} \quad (6.12)$$

Soit $\hat{x}_{out}(t)$, l'expression issue du schéma simplifié proposé à la section 6.2.2 lorsque l'agresseur effectue une transition de V_{SS} vers V_{DD} .

$$\hat{x}_{out}(t) = \begin{cases} 0 & t \in [0, \delta_a] \\ -\frac{I_a \tau_a}{C_{lv}} \cdot (1 - e^{-\frac{t-\delta_a}{\tau_a}}) & t \in [\delta_a, \delta_a + \delta_v] \\ \frac{I_a \tau_a}{C_{lv}} \left[\left(1 - \frac{\tau_a}{\tau_a - \tau_v} \cdot e^{-\frac{\delta_v}{\tau_a}}\right) \cdot e^{-\frac{t-(\delta_a+\delta_v)}{\tau_v}} + \frac{\tau_v}{\tau_a - \tau_v} \cdot e^{-\frac{t-\delta_a}{\tau_a}} \right] & t \in [\delta_a + \delta_v, +\infty[\end{cases} \quad (6.13)$$

Une fois encore, l'approximation passe par la définition d'une distance. Nous utilisons la même notion de distance que celle définie dans la section précédente. Ainsi, $\hat{x}_{out}(t)$ est une approximation de $x_{out}(t)$ si et seulement si

$$d(\hat{x}_{out}(t), x_{out}(t)) = \int_0^{+\infty} (\hat{x}_{out}(t) - x_{out}(t))^2 \cdot dt \text{ est minimale}$$

Cependant, dans le cas d'une victime agressée par un agresseur, la valeur du pic de bruit produit sur la victime a une importance essentielle. Aussi, nous proposons de minimiser la distance entre $\hat{x}_{out}(t)$ et $x_{out}(t)$ sous la contrainte suivante :

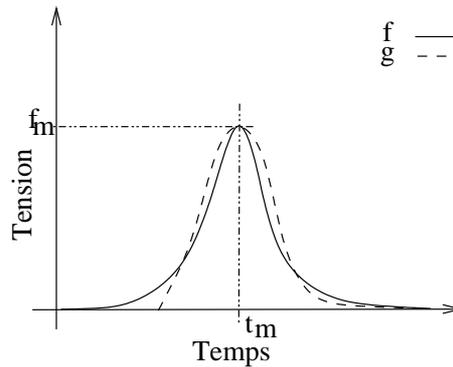


Figure 6.11: Exemple de courbes initiales et simplifiées

- Le pic de bruit induit sur le schéma simplifié se produit au même moment que le pic induit sur le réseau initial et est identique en amplitude.

Cette contrainte se traduit par les deux équations suivantes :

$$\text{soit } t_{max} \in]0; +\infty[\text{ tel que } x'_{out}(t_{max}) = 0$$

$$\text{alors } \hat{x}'_{out}(t_{max}) = 0$$

$$\text{et } \hat{x}_{out}(t_{max}) = x_{out}(t_{max})$$

Nous obtenons donc un système d'équations non linéaires

$$\begin{cases} F_1(\delta_a, \tau_a, I_a) = \frac{\partial}{\partial \delta_a} d(\hat{x}_{out}, x_{out}) = 0 \\ F_2(\delta_a, \tau_a, I_a) = x'_{out}(t_{max}) = 0 \\ F_3(\delta_a, \tau_a, I_a) = \hat{x}_{out}(t_{max}) - x_{out}(t_{max}) = 0 \end{cases} \quad (6.14)$$

Ce système est résolu en utilisant, comme dans la section précédente, la méthode de Newton-Raphson généralisée.

6.3.3 Paramètres extraits à partir d'une simulation électrique

Nous avons vu dans le chapitre 4 deux méthodes d'évaluation de la fonction de sortie d'un réseau quelconque. Ces méthodes, du fait de leur complexité, peuvent être très coûteuses en temps d'exécution. C'est pourquoi, nous présentons dans cette section une extension des techniques exposées ci-dessus pour calculer les paramètres du schéma simplifié à partir de simulation électrique.

Nous obtenons, à partir de la simulation électrique du réseau de la victime, un ensemble de

points représentant la tension de la victime : x_{out} est donc définie pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$ $x_{out}(t_i)$. Par la suite, on note $x_{out}(t_i)$ la valeur obtenue par simulation électrique au temps t_i et \hat{x}_{out} l'expression de la tension obtenue par le schéma simplifié.

Comme dans les sections précédente, pour déterminer les paramètres de la victime, nous tentons de trouver une approximation de $x_{out}(t_i)$. Comme $x_{out}(t_i)$ est définie par un ensemble de points nous proposons d'utiliser la mesure de distance suivante :

$$d(\hat{x}_{out}, x_{out}) = \sum_{i=1}^N (x_{out}(t_i) - \hat{x}_{out}(t_i))^2 \quad (6.15)$$

soit

$$\begin{aligned} d(\hat{x}_{out}, x_{out}) &= \sum_{i=1}^m (x_{out}(t_i) - V_{DD})^2 + \sum_{i=m+1}^N (x_{out}(t_i) - V_{DD}e^{-\frac{t_i - \delta_v}{\tau_v}})^2 \\ &= \sum_{i=1}^m x_{out}^2(t_i) + V_{DD}^2 - 2x_{out}(t_i)V_{DD} + \sum_{i=m+1}^N x_{out}^2(t_i) \\ &\quad + V_{DD}^2 e^{-2\frac{t_i - \delta_v}{\tau_v}} - 2x_{out}(t_i)V_{DD}e^{-\frac{t_i - \delta_v}{\tau_v}} \end{aligned} \quad (6.16)$$

Pour minimiser $d(\hat{x}_{out}, x_{out})$ on utilise, comme précédemment, la méthode de Newton-Raphson généralisée :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \delta_v} d(\hat{x}_{out}, x_{out}) &= \sum_{i=m+1}^N \frac{2V_{DD}^2}{\tau_v} e^{-2\frac{t_i - \delta_v}{\tau_v}} + \frac{2x_{out}(t_i)V_{DD}}{\tau_v} e^{-\frac{t_i - \delta_v}{\tau_v}} \\ &= F_1(\delta_v, \tau_v) \\ \frac{\partial}{\partial \tau_v} d(\hat{x}_{out}, x_{out}) &= \sum_{i=m+1}^N 2V_{DD}^2 \frac{t_i - \delta_v}{\tau_v^2} e^{-2\frac{t_i - \delta_v}{\tau_v}} - 2f(t_i)V_{DD} \frac{t_i - \delta_v}{\tau_v^2} e^{-\frac{t_i - \delta_v}{\tau_v}} \\ &= F_2(\delta_v, \tau_v) \end{aligned} \quad (6.17)$$

De même, pour déterminer les paramètres de l'agresseur, nous faisons coïncider les maximums de x_{out} et \hat{x}_{out} et minimisons leur différence au carré.

6.4 Conclusion

Nous avons présenté, dans ce chapitre, les schémas simplifiés de la victime et de l'agresseur. La manière dont sont déterminés les paramètres de ces modèles, soit à partir de la fonction exacte de la sortie, soit à partir de simulation électrique, a été expliquée.

Chapitre 7

Intégration à l'outil d'analyse de diaphonie CRISE

Sommaire

7.1	Introduction	92
7.2	Formulation du problème	92
7.3	Modèle de calcul du bruit	94
7.4	Conclusion	95

Dans ce chapitre, nous montrons comment les schémas simplifiés peuvent être pris en compte dans l'analyse de diaphonie réalisée par l'outil CRISE. Tout d'abord, nous expliquons comment ajouter les retards dans l'analyse de stabilité. Ensuite, le modèle du pic de bruit en présence du schéma simplifié est établi.

7.1 Introduction

Dans le chapitre 3, nous avons présenté un outil d'analyse de diaphonie. Cet outil évalue le pic de diaphonie qui peut survenir sur chaque signal sans prendre en compte les résistances d'interconnexion.

Nous avons vu, dans les chapitres 4, 5 et 6, une méthode de réduction qui permet de modéliser un réseau quelconque comportant une victime et des agresseurs par un schéma simplifié. Le signal victime est modélisé par un délai, une résistance et une capacité, et chacun des agresseurs par une source de courant (cf. figure 7.1).

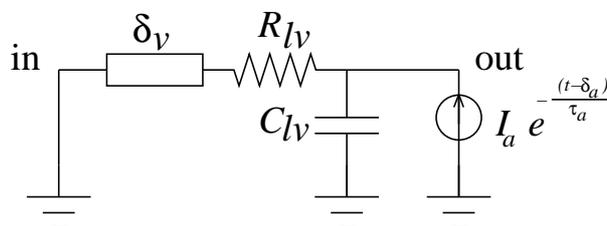


Figure 7.1: Schéma simplifié

Dans ce chapitre, nous expliquons comment ces schémas simplifiés peuvent être pris en compte dans l'outil de diaphonie.

7.2 Formulation du problème

Dans un circuit réel, un signal donné peut avoir plusieurs récepteurs et être couplé avec quelques centaines de signaux, eux-mêmes couplés avec d'autres signaux. Considérons le cas simple d'un signal victime v , ayant deux récepteurs, couplé avec deux agresseurs a_1 et a_2 (cf. figure 7.2). Chaque fil d'interconnexion est modélisé par un réseau de résistances et de capacités. Appelons out_1 le nœud situé à l'entrée du premier récepteur et out_2 le nœud situé à l'entrée du second récepteur.

La méthode de réduction proposée permet d'analyser les sorties des réseaux une à une. Intéressons-nous au nœud out_1 . Nous modélisons les portes émettrices des signaux agresseurs par des résistances, qui sont incluses dans les réseaux de résistances et de capacités des agresseurs. La méthode de réduction exposée aux chapitres 4, 5 et 6 permet de ramener ce circuit au

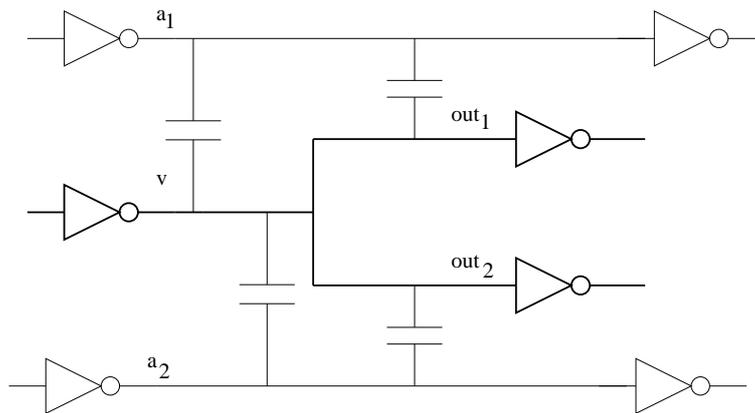


Figure 7.2: Victime ayant plusieurs récepteurs (out_1 et out_2) agressé par plusieurs agresseurs (a_1 et a_2)

schéma simplifié de la figure 7.3. Ce circuit est composé de la résistance de la porte émettrice de la victime R_v , de sa capacité C_v ainsi que du schéma simplifié des fils d'interconnexion de la victime et des agresseurs. Le schéma simplifié correspond à la sortie out_1 lorsque les agresseurs a_1 et a_2 effectuent une transition.

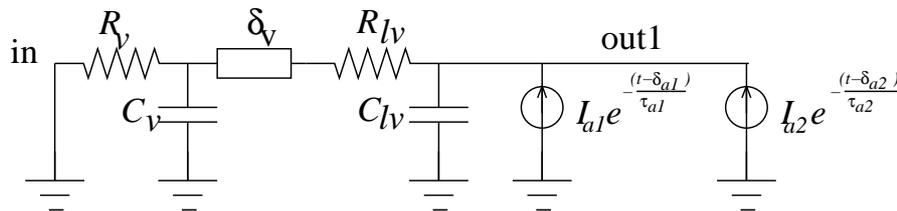


Figure 7.3: Schéma simplifié pour la sortie out_1 utilisé pour une analyse de diaphonie

De manière générale, pour un nœud de sortie considéré out_i et couplé avec n agresseurs actifs, le schéma simplifié est représenté à la figure 7.4.

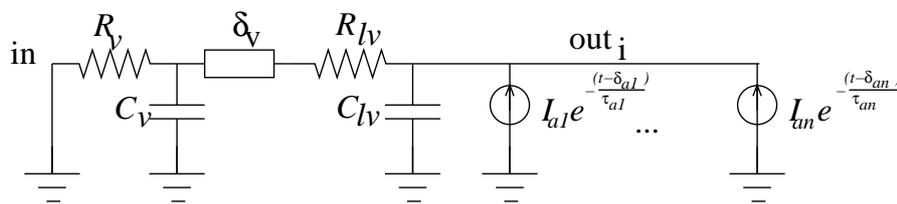


Figure 7.4: Schéma simplifié général d'un nœud de sortie out_i agressé par n agresseurs actifs

Nous avons vu, dans le chapitre 3, qu'une méthode d'analyse statique permet, à partir des délais des portes de déterminer les intervalles d'instabilité de tous les signaux et, par conséquent, les configurations d'agression. Dans cette méthode d'analyse, la détermination

des configurations d'agression maximales est basée sur l'idée que la victime subit le pic de tension maximal lorsqu'un maximum d'agresseur commutent en même temps. Or, comme nous l'avons vu au chapitre 6, la prise en compte des résistances d'interconnexion des agresseurs se traduit par un retard δ_{a_i} dans la source de courant qui modélise l'agresseur. Ainsi, pour déterminer si plusieurs agresseurs commutent en même temps, au cours de l'analyse statique, il faut tenir compte des retards δ_{a_i} . Ces retards modifient les intervalles d'instabilité des agresseurs et, par conséquent, les configurations d'agression maximales.

7.3 Modèle de calcul du bruit

Les délais étant pris en compte lors de l'analyse statique, le circuit électrique final pour l'analyse de la diaphonie est alors simplifié (cf. figure 7.5).

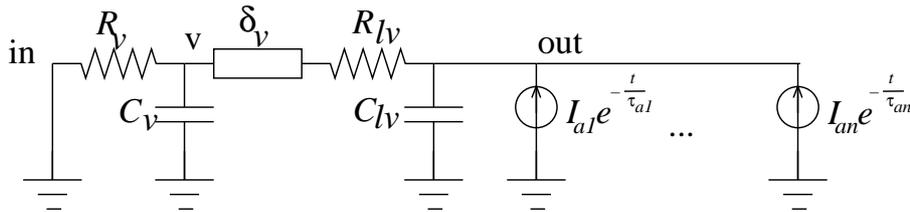


Figure 7.5: Circuit final pour analyse de diaphonie

La loi des nœuds appliquée en v et out donne

$$\begin{cases} G_v \cdot x_v + C_v \cdot x'_v & = G_{lv} \cdot x_{out} \\ G_{lv} \cdot x_{out} + C_{lv} x'_{out} & = G_{lv} \cdot x_v + \sum_{i=1}^n I_{a_i} \cdot e^{-\frac{t}{\tau_{a_i}}} \end{cases} \quad (7.1)$$

avec $G_v = \frac{1}{R_v} + \frac{1}{R_{lv}}$ et $G_{lv} = \frac{1}{R_{lv}}$

L'expression de x_{out} issue de la résolution de ce système peut s'écrire comme une somme de $n + 2$ exponentielles.

$$x_{out}(t) = K_1 \cdot e^{r_1 \cdot t} + K_2 \cdot e^{r_2 \cdot t} + \sum_{i=1}^n K_{a_i} e^{-\frac{t}{\tau_{a_i}}} \quad (7.2)$$

où τ_1, τ_2 sont les constantes de temps du système et dépendent de la valeur des résistances et des capacités. K_1, K_2 et K_{a_i} sont les coefficients des exponentielles. Leurs valeurs dépendent

également des valeurs des résistances et des capacités. Les expressions de ces coefficients sont fournies en annexe F.

Pour connaître le pic de bruit subit par le signal *out*, nous déterminons par la méthode de Newton-Raphson l'instant t_{bruit} tel que $x'_{out}(t_{bruit}) = 0$. Le pic de tension est alors

$$V_{bruit} = K_1 \cdot e^{r_1 \cdot t_{bruit}} + K_2 \cdot e^{r_2 \cdot t_{bruit}} + \sum_{i=1}^n K_{ai} e^{-\frac{t_{bruit}}{\tau_{ai}}} \quad (7.3)$$

7.4 Conclusion

Nous avons montré, dans ce chapitre, que les schémas simplifiés obtenus grâce aux méthodes de réduction que nous avons exposées aux chapitres 4, 5 et 6 peuvent être pris en compte par l'outil d'analyse de diaphonie développé par Fabrice Ilponse.

Chapitre 8

Mise en œuvre et résultats

Sommaire

8.1	Introduction	98
8.2	Mise en œuvre	98
8.3	Description des réseaux utilisés	99
8.4	Encombrement mémoire et nombre de bits de représentation	100
8.5	Temps d'exécution	104
8.6	Précision du modèle	109
8.7	Conclusion	114

Ce chapitre présente la mise en œuvre des méthodes décrites aux chapitres 4, 5 et 6 dans un logiciel prototype, le fonctionnement de ce logiciel ainsi que les résultats obtenus sur un ensemble de réseaux de résistances et de capacités.

8.1 Introduction

Dans les chapitres 4, 5 et 6 nous avons présenté une méthode de réduction de réseaux de résistances et de capacités. Ce chapitre expose la mise en œuvre de cette méthode dans un logiciel prototype. Nous présentons d'abord l'organisation logicielle de ce prototype, puis un ensemble de réseaux de résistances et de capacités sur lesquels le prototype a été appliqué. Pour finir, nous montrons la performance obtenue en termes de capacité mémoire occupée et de temps d'exécution en fonction du type et de la taille du réseau traité.

8.2 Mise en œuvre

La méthode de réduction est composée de deux étapes : l'*analyse* permet d'obtenir l'expression des nœuds de sortie en fonction des nœuds d'entrée tandis que la *réduction* détermine les paramètres du schéma simplifié. Le logiciel prototype, en plus de ces deux étapes, comporte

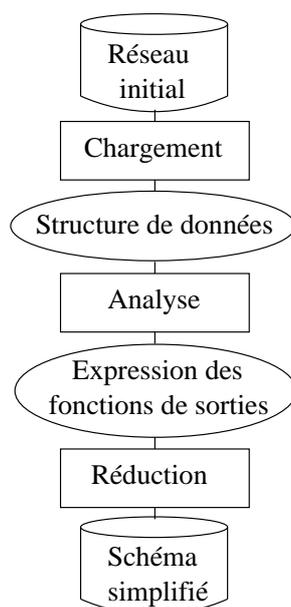


Figure 8.1: Organigramme du prototype

une étape de chargement, qui à partir d'une netlist de résistances et de capacités au format SPICE, génère une structure de données ad hoc pour l'*analyse* et la *réduction* (cf. figure 8.1).

L'étape d'*analyse* peut être réalisée par deux méthodes, appelées méthodes directe et indirecte représentées sur la figure 8.2.

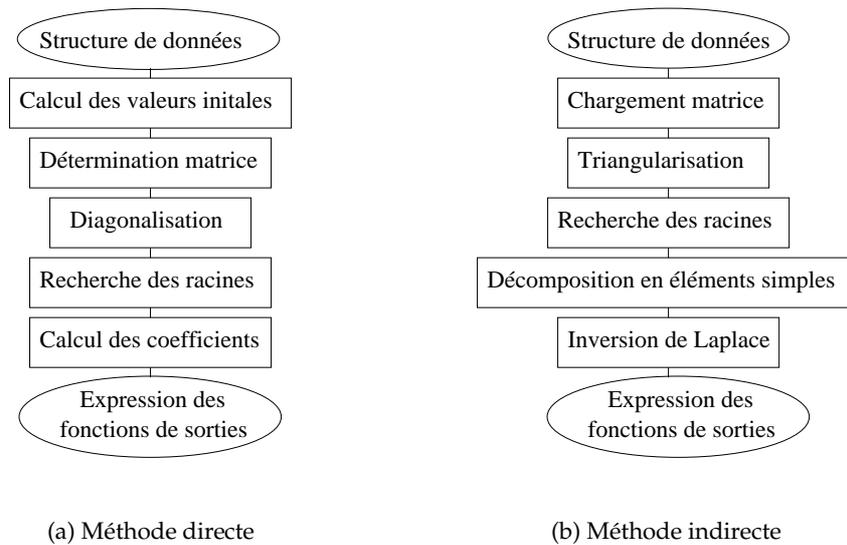


Figure 8.2: Organigramme des méthodes directe et indirecte

Dans la méthode directe, à partir du *calcul des valeurs initiales* et des dérivées successives aux différents nœuds du circuit, nous obtenons un système d'équations où les inconnues sont les constantes de temps et les coefficients des exponentielles. Puis, nous construisons la matrice permettant de calculer les coefficients d'un polynôme dont les racines sont les constantes de temps. Ensuite, la diagonalisation permet de résoudre cette équation matricielle. Pour calculer les constantes de temps nous *recherchons les racines* d'un polynôme. Puis nous procédons au *calcul des coefficients*.

Dans la méthode indirecte, l'équation matricielle caractérisant le circuit est obtenue dans le domaine fréquentiel par l'étape *chargement matrice*. Ensuite, la *triangularisation* permet d'obtenir, une équation reliant l'expression des nœuds de sortie à celles des nœuds d'entrée. Puis, nous *recherchons les racines* d'un polynôme afin d'effectuer une *décomposition en éléments simples*. Pour finir, *l'inversion de Laplace* permet de revenir dans le domaine temporel.

8.3 Description des réseaux utilisés

Le logiciel prototype a été appliqué à différents types de réseaux. Il s'agit de réseaux simples tels que les chaînes et les arbres avec deux et trois récepteurs (cf. figure 8.3) ou de réseaux plus complexes tels que les réseaux avec capacités de couplage (cf. figure 8.4) et les réseaux maillés

(cf. figure 8.5).

Toutes les expérimentations ont été menées sur un Pentium III fonctionnant à 1GHz et ayant près de 1Go de mémoire.

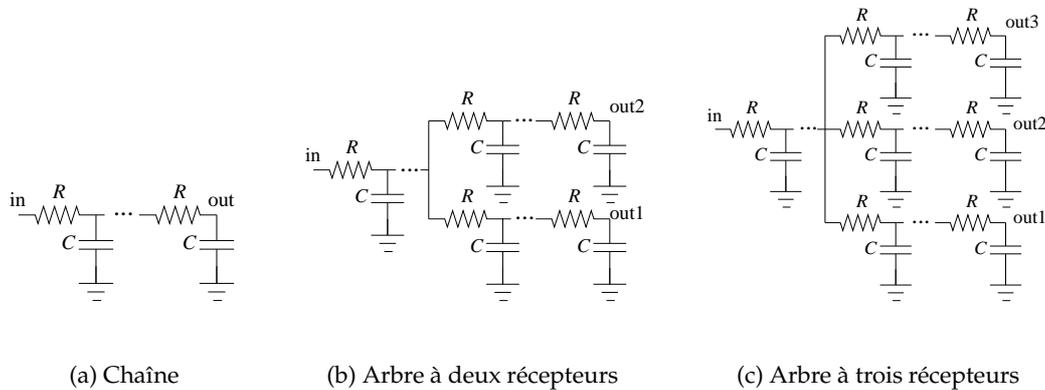


Figure 8.3: Exemples de réseaux en arbres

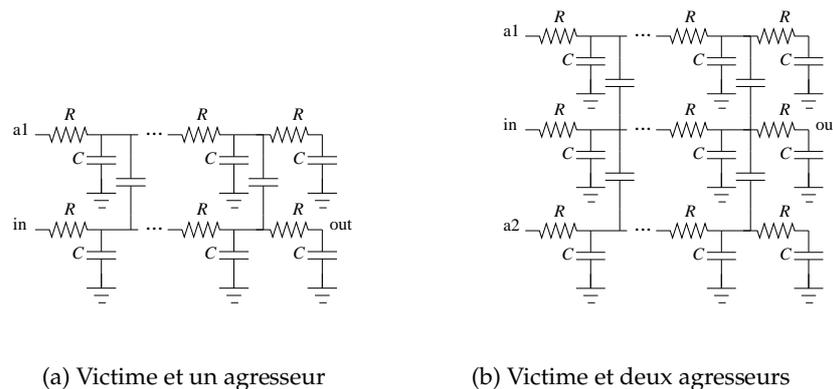


Figure 8.4: Exemples de réseaux avec capacités de couplage

8.4 Encombrement mémoire et nombre de bits de représentation

L'expérience montre que la méthode que nous proposons nécessite une représentation de la mantisse des nombres flottants sur une taille supérieure à 64 bits. Nous avons utilisé la bibliothèque GMP [GMP] pour représenter les nombres flottants.

Outre le nombre de nœud du réseau étudié, l'encombrement mémoire est lié à la taille de la mantisse des nombres flottants. Les différentes méthodes de recherche de racines des po-

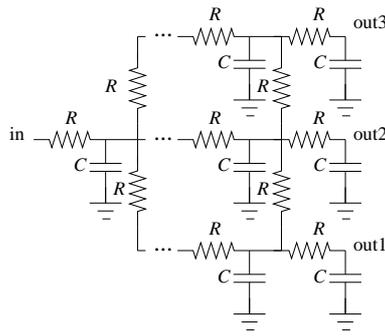


Figure 8.5: Exemple de réseau maillé

lynômes nécessitent une mantisse plus ou moins importante. C'est pourquoi nous présentons dans cette section l'évolution du nombre de bits de la mantisse des nombres flottants en fonction du type de réseaux et de la méthode de recherche de racines utilisée.

La figure 8.6 montre la taille de la mantisse des nombres flottants pour une chaîne de résistances et de capacités en fonction de la méthode de recherche des racines de polynôme. Nous

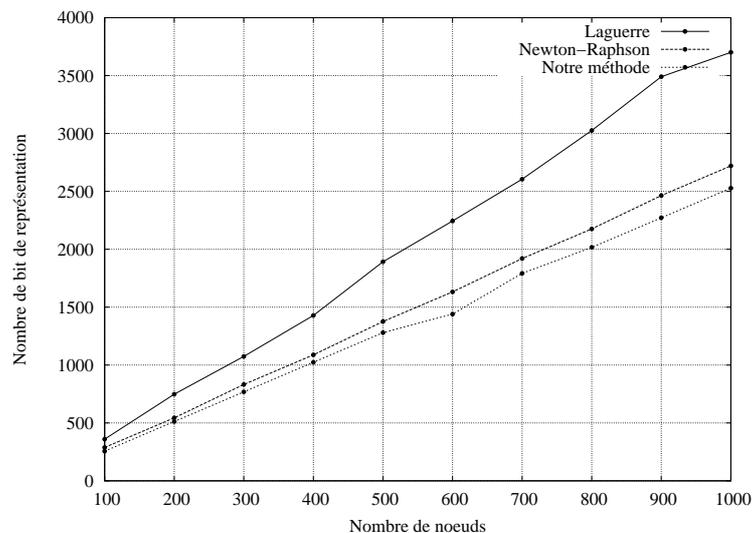


Figure 8.6: Taille de la mantisse des nombres flottants pour les chaînes

remarquons que quelle que soit la méthode de recherche des racines, le nombre de bits de représentation varie de manière linéaire avec le nombre de nœuds. De plus, la méthode de Laguerre est la plus coûteuse des méthodes suivie par la méthode de Newton-Raphson. Cela s'explique par le fait que cette méthode utilise les dérivées secondes des polynômes alors que les autres méthodes n'utilisent que les dérivées premières. Comme nous l'avons expliqué au chapitre 5, la méthode de recherche que nous proposons ne nécessite pas des étapes de déflation succes-

sives. On pouvait donc s'attendre à ce que le nombre de bits nécessaires pour la mantisse soit plus petit. La figure 8.6 montre que l'expérience confirme notre hypothèse.

Les figures 8.7 et 8.8 montrent l'évolution du nombre de bits pour les arbres ayant deux et trois récepteurs. Là encore on peut remarquer que le nombre de bits de représentation varie de manière linéaire avec le nombre de nœuds et que la méthode de Laguerre est plus coûteuse que la méthode de Newton-Raphson elle-même plus coûteuse que notre méthode.

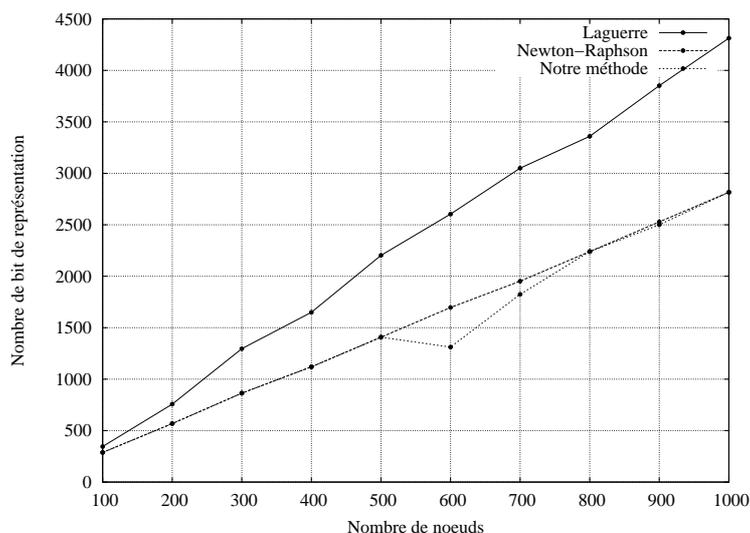


Figure 8.7: Taille de la mantisse des nombres flottants pour les arbres à deux récepteurs

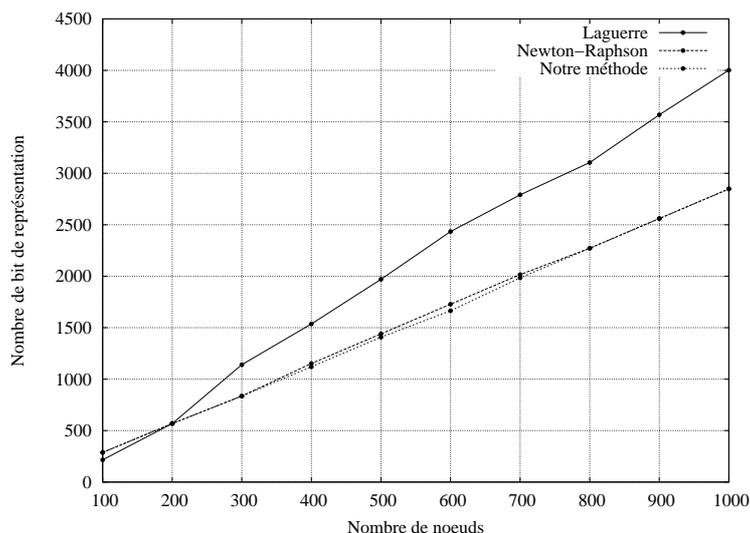


Figure 8.8: Taille de la mantisse des nombres flottants pour les arbres à trois récepteurs

Dans la suite nous allons comparer la méthode Newton-Raphson et notre méthode pour les

8.4. ENCOMBREMENT MÉMOIRE ET NOMBRE DE BITS DE REPRÉSENTATION

réseaux plus complexes.

Maintenant, regardons l'évolution du nombre de bits représentant un nombre pour les réseaux ayant un et deux agresseurs (cf. figure 8.9 et 8.10) et pour les réseaux maillés (cf. figure 8.11).

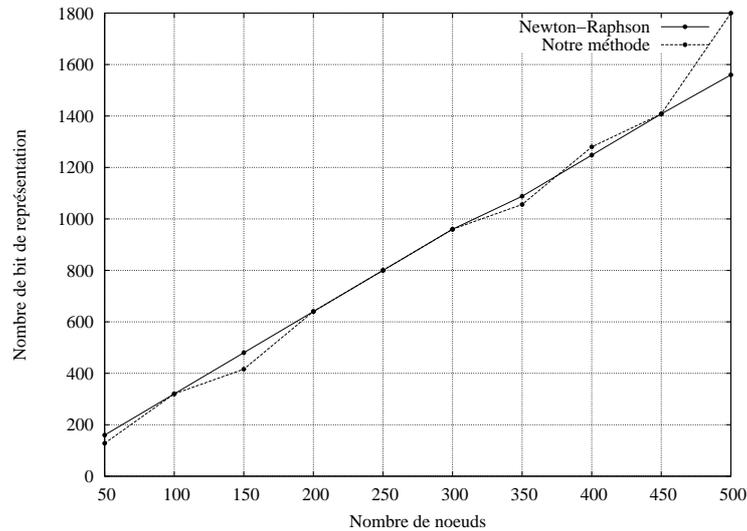


Figure 8.9: Taille de la mantisse des nombres flottants pour les réseaux ayant un agresseur

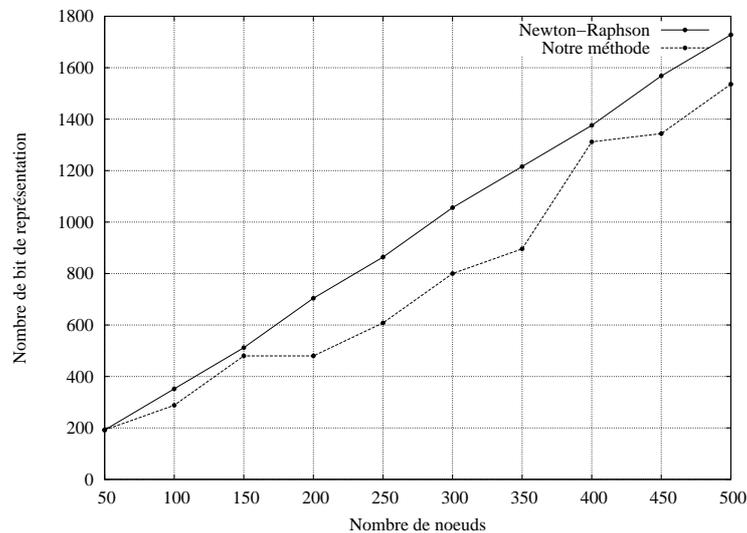


Figure 8.10: Taille de la mantisse des nombres flottants pour les réseaux ayant deux agresseurs

Nous pouvons remarquer que globalement, quelle que soit la topologie du réseau, la méthode que nous proposons nécessite un plus petit nombre de bits. Cependant, la différence avec

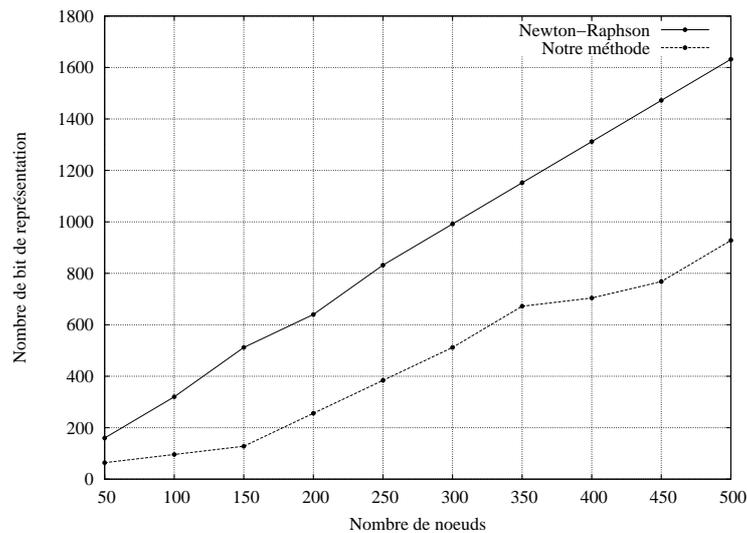


Figure 8.11: Taille de la mantisse des nombres flottants pour les réseaux ayant deux maillages

la méthode de Newton-Raphson n'est significative que pour certains types de réseaux.

8.5 Temps d'exécution

8.5.1 Méthode directe

Comme nous l'avons vu à la figure 8.2.b, la méthode directe comporte quatre étapes : calcul des valeurs initiales des dérivées successives, résolution de la matrice, calcul des constantes de temps des exponentielles, calcul des coefficients des exponentielles.

Pour un réseau donné, les constantes de temps des exponentielles ne dépendent que de la valeur des résistances et des capacités. Les valeurs des coefficients des exponentielles dépendent quant à elles de la transition de la victime ou des agresseurs. Aussi, pour chaque réseau, le calcul des constantes de temps peut être fait une seule fois alors que le calcul des coefficients doit être réalisé pour chaque agresseur.

Dans l'évaluation du temps d'exécution, nous avons donc décidé de séparer ces deux étapes. Un premier résultat concerne donc le temps de calcul des constantes de temps. Cette étape comprend la construction puis la résolution de la matrice et la détermination des constantes de temps. Pour ces expériences nous avons utilisé la méthode de Newton-Raphson pour la recherche des racines des polynômes.

La figure 8.12 montre les temps d'exécution pour obtenir les constantes de temps des exponentielles avec la méthode directe pour les réseaux sans capacité de couplage. Nous remar-

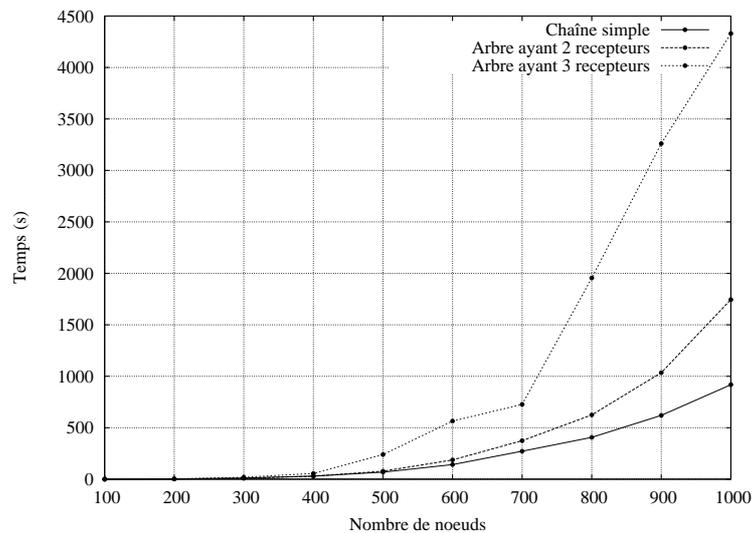


Figure 8.12: Temps d'exécution pour calculer les τ_i avec la méthode directe pour les arbres

quons que la complexité du calcul des constantes de temps pour cette méthode est en N^4 où N est le nombre de nœuds internes. Ceci est dû à la résolution de la matrice par pivot de Gauss dont la complexité est en N^2 . A ceci il faut ajouter le fait que nous utilisons des opérations de multiplication sur des nombres dont la taille de la mantisse est proportionnelle au nombre de nœuds internes du réseau. Nous obtenons donc une complexité en N^4 .

Les temps d'exécution pour obtenir les coefficients sont montrés sur la figure 8.13 Cette étape comprend le calcul des valeurs initiales des dérivées successives et l'étape de calcul des coefficients des exponentielles. Dans cette étape les $N + 1$ valeurs initiales des dérivées de N nœuds du réseau sont calculées et les opérations ne font appel qu'à des additions. La complexité de cette étape est donc de N^3 .

Les figures 8.14 et 8.15 montrent respectivement le temps d'exécution pour le calcul des constantes de temps et des coefficients pour les réseaux complexes.

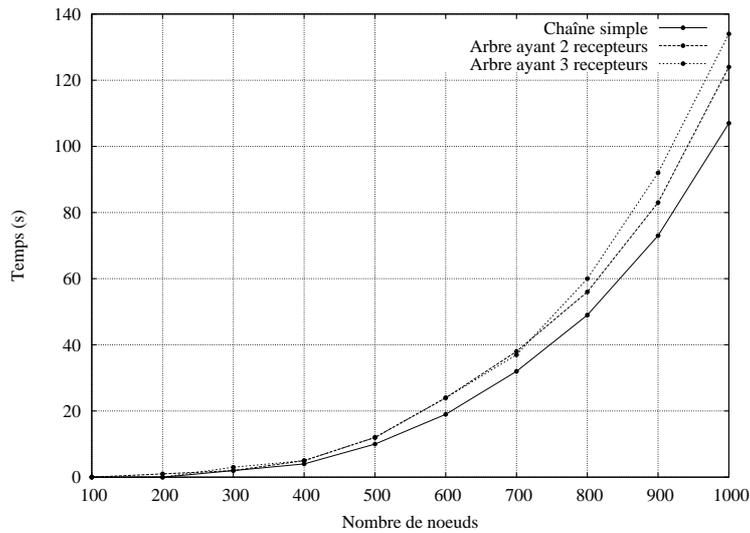


Figure 8.13: Temps d'exécution pour calculer les a_i avec la méthode directe pour les arbres

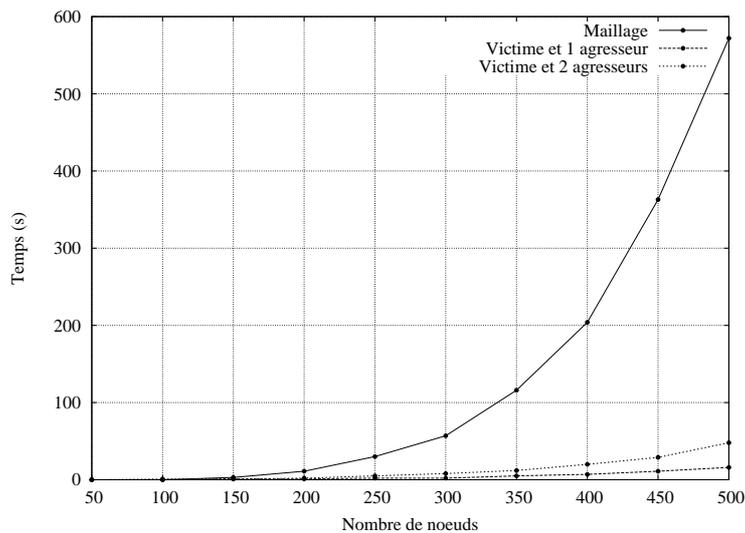


Figure 8.14: Temps d'exécution pour obtenir les τ_i avec la méthode directe pour les réseaux complexes

Globalement, la majeure partie du temps d'exécution est due à la détermination des constantes de temps.

8.5.2 Méthode indirecte

La figure 8.16 montre les temps d'exécution de la méthode indirecte pour obtenir les constantes de temps des réseaux sans capacité de couplage.

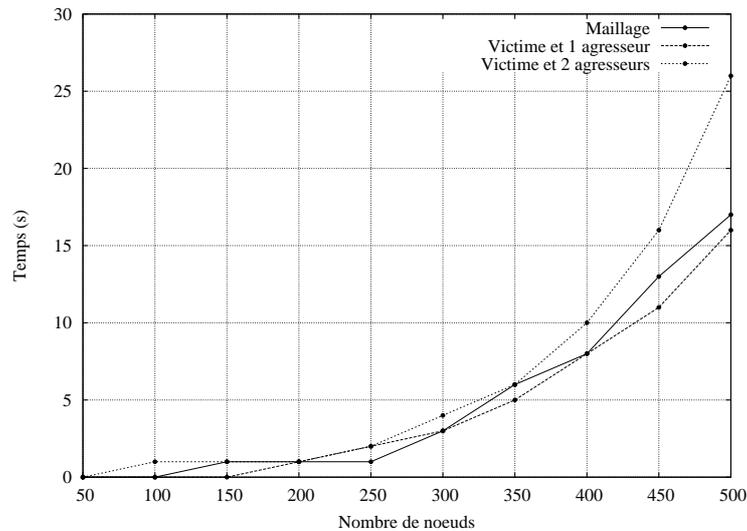


Figure 8.15: Temps d'exécution pour obtenir les a_i avec la méthode directe pour les réseaux complexes

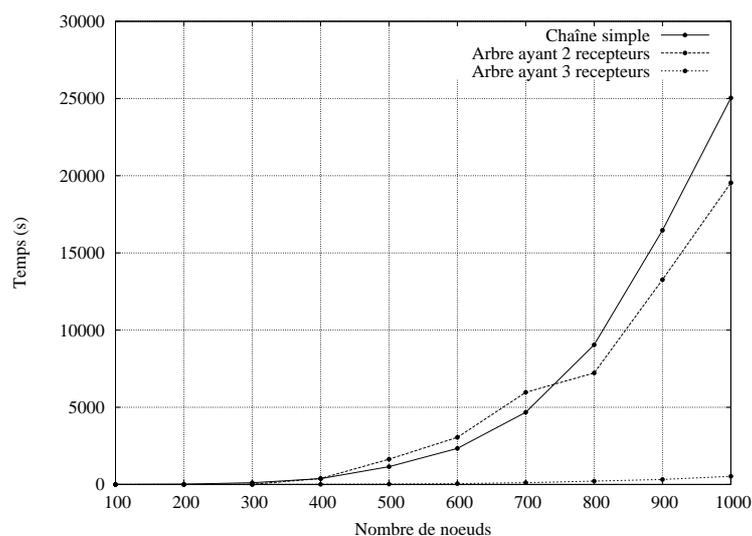


Figure 8.16: Temps d'exécution pour calculer les τ_i avec la méthode indirecte pour les arbres

Pour cette méthode, le calcul des constantes de temps est de complexité N^4 où N est le nombre de nœuds internes. Ce calcul nécessite un pivot de Gauss (N^2) appliqué à des polynômes dont le degré augmente linéairement avec N . Ce qui nous donne une complexité en N^3 . Pour finir, le nombre de bits nécessaire pour coder la mantisse des nombres flottants est proportionnel au nombre de nœuds internes. Nous obtenons donc une complexité en N^4 .

Les temps d'exécution pour obtenir les coefficients avec la méthode indirecte sont mon-

trés sur la figure 8.17. Pour calculer les N coefficients nous effectuons une décomposition en

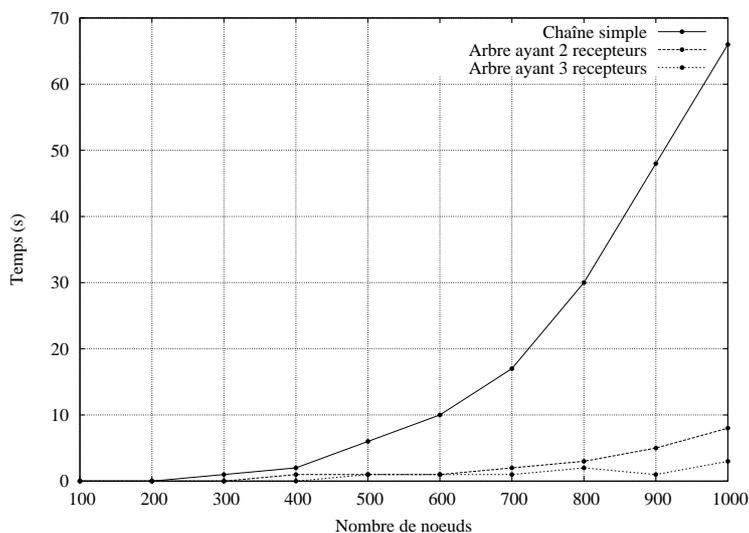


Figure 8.17: Temps d'exécution pour calculer les a_i avec la méthode indirecte pour les arbres éléments simples dont la complexité est en N^2 .

Nous n'avons pas appliqué la méthode indirecte à des réseaux complexes pour deux raisons. La première est que cette méthode est nettement moins performante que la méthode directe sur des chaînes et des arbres simples. On peut donc s'attendre à ce qu'elle soit toujours moins performante pour les réseaux complexes. La seconde raison provient de la complexité intrinsèque de la méthode. Nous avons vu dans le chapitre 4 que lorsque le réseau étudié est fortement couplé chaque itération du pivot de Gauss double le degré des polynômes. Cette augmentation de l'ordre des polynômes diminue considérablement l'efficacité de cette méthode et ajoute en instabilité numérique. En effet, le polynôme attendu étant d'ordre N nous devons déterminer le PGCD entre les polynômes obtenus pour la sortie et pour l'entrée puis le diviser à chaque polynôme.

8.6 Précision du modèle

Dans cette section nous comparons le schéma simplifié issu de notre méthode à des simulations électriques. Nous avons effectué cette comparaison pour une transition de la victime et pour une transition des agresseurs.

La figure 8.18 montre une comparaison entre la simulation électrique d'une chaîne composée de 100 nœuds lorsque l'entrée de la chaîne effectue une transition et l'expression obtenue à partir du schéma simplifié de cette chaîne. Comme prévu, l'expression réduite est composée de deux parties. La tension est nulle entre l'instant 0 et δ_v puis la transition a lieu suivant une exponentielle. Nous pouvons remarquer que la différence entre les deux courbes durant la transition est très faible.

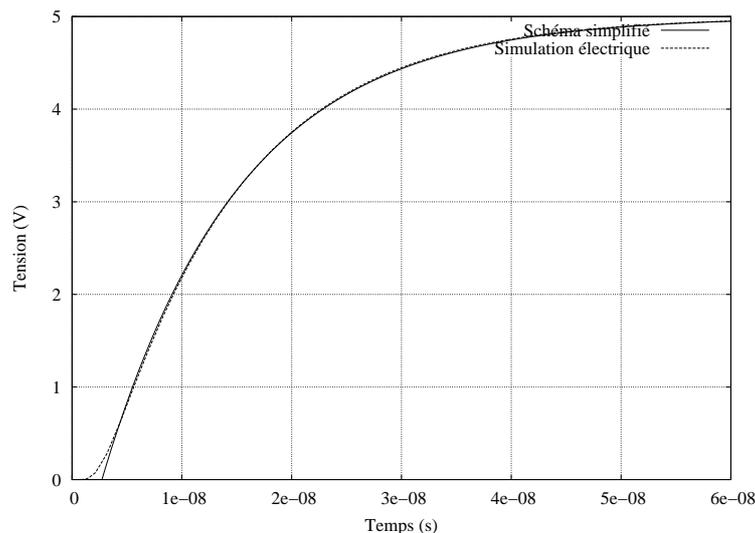


Figure 8.18: Schéma simplifié versus réseau initial

La figure 8.19 montre la tension de sortie d'une chaîne de 50 nœuds couplée avec un agresseur composé lui-même de 50 nœuds. La tension de sortie est obtenue par une simulation électrique lorsque la victime est stable à V_{SS} et l'agresseur effectue une transition de V_{SS} vers V_{DD} . Cette simulation est comparée à l'expression obtenue par le schéma simplifié de ce réseau composé d'une résistance, d'une capacité et d'une source de courant. Malgré sa simplicité, ce schéma simplifié représente une approximation acceptable du réseau.

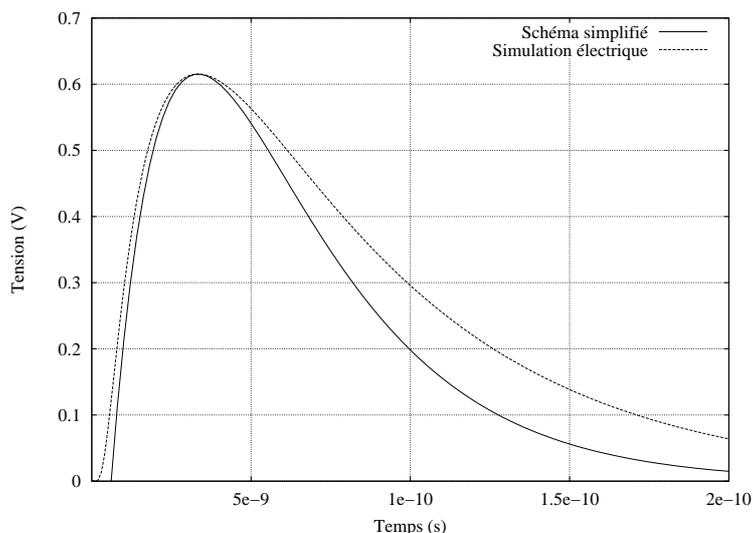


Figure 8.19: Tension du schéma simplifié et simulation électrique du réseau initial

Le tableau 8.1 présente les résultats obtenus par une simulation électrique et par notre méthode pour une victime couplée à deux agresseurs commutant en même temps. L'erreur calculée correspond à la différence des valeurs des pics obtenus ramenée à V_{DD} soit

$$Erreur = \left| \frac{Pic(reduction) - Pic(eldo)}{V_{DD}} \right| \quad (8.1)$$

Nbr de nœuds	Tension du pic en Volt pour $V_{DD}=5V$		Erreur
	Méthode proposée	Simulation électrique	
50	1.01	0.91	1.98%
100	1.01	0.91	2.04%
150	0.78	0.91	2.68%
200	0.69	0.87	3.56%
250	0.59	0.72	2.70%
300	0.78	0.91	2.68%
350	0.49	0.91	8.45%

Tableau 8.1 – Comparaison entre les résultats obtenus pour la méthode proposée et par simulation électrique pour une victime et 2 agresseurs

Nous remarquons que l'erreur reste raisonnable et est toujours inférieure à 10%.

Nous avons vu dans ce chapitre que le calcul des constantes de temps des exponentielles demandait environ une minute pour un réseau de 500 nœuds ayant deux agresseurs et que la complexité de ce calcul est en N^4 . D'après cette hypothèse, le traitement d'un réseau identique de 5000 nœuds demanderait 10000 minutes soit près de 160 heures. Il est évident qu'un tel temps d'exécution n'est pas acceptable dès lors que l'on souhaite traiter des circuits comportant plusieurs centaines de milliers de signaux. Pour remédier à ce problème nous proposons de fractionner le réseau, c'est à dire d'analyser séparément l'impact de chaque agresseur sur la victime. Cette opération consiste à construire plusieurs réseaux plus simples en considérant un seul agresseur et en ramenant les capacités de couplage avec les autres agresseurs à la masse.

Considérons le réseau initial composé de 100 nœuds et ayant deux agresseurs de la figure 8.20.

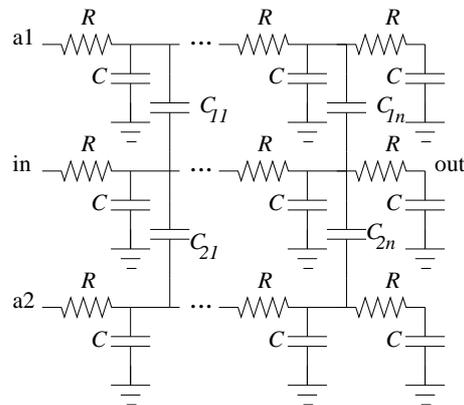


Figure 8.20: Réseau comportant une victime et deux agresseurs

Le réseau fractionné permettant de déterminer les paramètres de la victime est montré figure 8.21. Les capacités de couplage des agresseurs sont connectées à la masse.

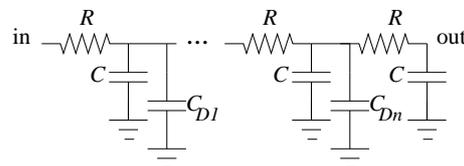


Figure 8.21: Réseau fractionné une victime et un agresseur

La figure 8.22 montre l'expression de sortie obtenue et la simulation électrique correspondante.

Le réseau fractionné permettant de calculer l'impact de l'agresseur a_1 sur la victime est

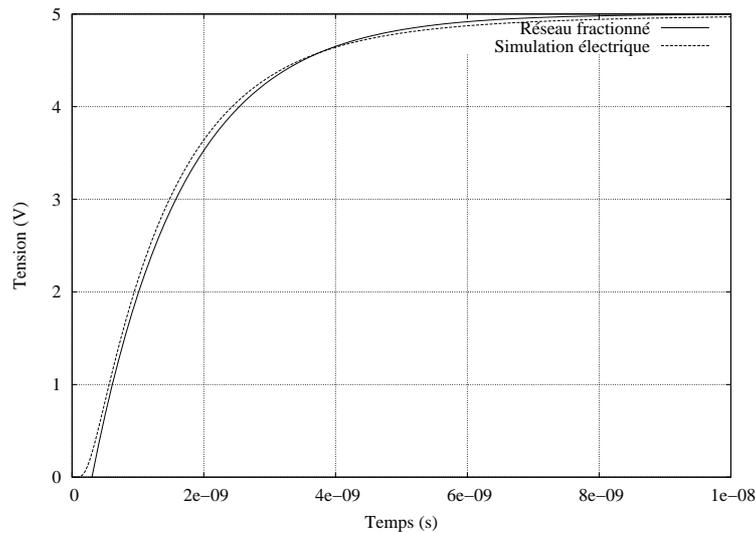


Figure 8.22: Expression de sortie et simulation électrique

montré figure 8.23. Les capacités de couplage de l'agresseur a_2 sont connectées à la masse.

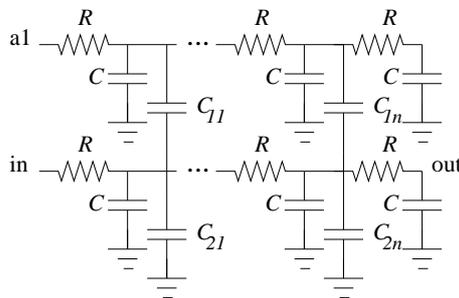


Figure 8.23: Réseau fractionné une victime et un agresseur

La figure 8.24 montre l'expression de sortie obtenue et la simulation électrique correspondante. Comme on pouvait s'y attendre cette simplification augmente légèrement l'erreur par rapport à une simulation électrique du réseau entier.

La figure 8.25 montre le réseau fractionné permettant de calculer les paramètres de l'agresseur a_2 .

Le tableau 8.2 compare les résultats et les temps d'exécution obtenus pour le traitement global et fractionné du circuit pour des réseaux ayant 2 agresseurs.

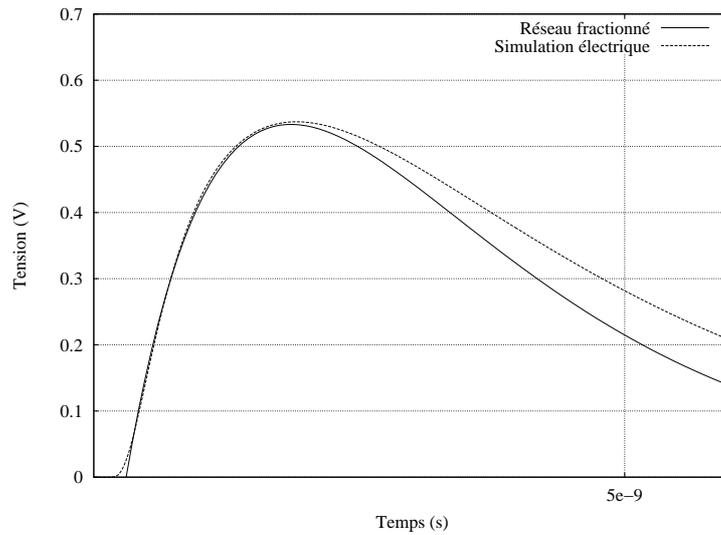


Figure 8.24: Expression de sortie et simulation électrique

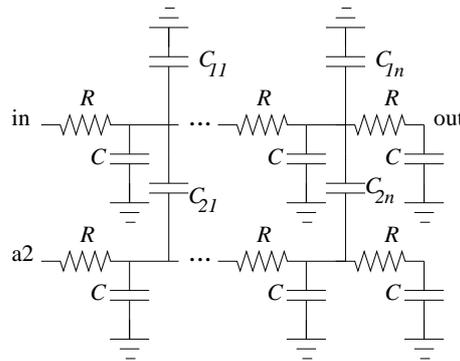


Figure 8.25: Réseau fractionné une victime et un agresseur

Nbr de nœuds	Traitement global		Traitement fractionné	
	Erreur	Temps total (s)	Erreur	Temps total (s)
50	1.98%	1	2.18%	1
100	2.04%	1	2.20%	1
150	2.68%	4	5.89%	2
200	3.56%	15	6.95%	8
250	2.70%	37	1.77%	18
300	2.68%	77	6.86%	38
350	8.45%	142	7.64%	68

Tableau 8.2 – Comparaison des temps d'exécution obtenus avec la méthode directe pour le traitement global et fractionné de réseaux

Nous remarquons que le temps d'exécution est divisé par deux entre le traitement global et fractionné des réseaux. Cela s'explique par le fait que nous effectuons un premier traitement pour déterminer les paramètres de la victime sur un réseau de taille $\frac{N}{3}$ puis deux traitements pour déterminer les paramètres des agresseurs sur des réseaux de taille $\frac{2N}{3}$. Or, le temps d'exécution est proportionnel au nombre de nœuds puissance 4. D'où un gain sur le temps de calcul :

$$\left(\frac{1}{3}\right)^4 + 2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^4 = 0.40 \quad (8.2)$$

La précision du résultat obtenu par le traitement fractionné est globalement moins bonne que pour le traitement global.

8.7 Conclusion

Nous avons montré dans ce chapitre l'encombrement mémoire pour les trois méthodes de recherche de racines de polynôme et avons remarqué que les méthodes Newton-Raphson et la nôtre ont un encombrement similaire tandis que la méthode de Laguerre à un encombrement supérieur. Nous avons ensuite présenté les temps d'exécution relatifs aux méthodes directe et indirecte d'*analyse* et démontré que la méthode indirecte est beaucoup moins efficace que la méthode directe. Pour finir, nous avons montré la précision du modèle et avons proposé une solution pour réduire le temps de calcul à savoir fractionner le réseau initial et traiter chaque agresseur indépendamment. Cette technique présente l'avantage de diminuer considérablement le temps d'exécution mais augmente légèrement l'erreur du schéma simplifié.

Chapitre 9

Conclusion et perspectives

Avec l'évolution de la technologie de fabrication de nouveaux éléments parasites apparaissent. La proximité des fils d'interconnexion fait apparaître des capacités de couplage entre les signaux voisins. De plus, la finesse de gravure rend la résistance des fils d'interconnexion non négligeable. Ces éléments parasites peuvent compromettre le fonctionnement des circuits de deux manières : erreurs temporelles ou fonctionnelles. En effet, la présence de capacité de couplage entre deux fils voisins peut accélérer ou retarder la transition du signal victime lorsque le signal agresseur effectue une transition. Cette modification des temps de propagation sur le chemin critique peut provoquer le mauvais fonctionnement d'un circuit. D'un point de vue fonctionnel, le bruit généré par la transition du signal agresseur lorsque le signal victime est stable peut corrompre le fonctionnement d'un circuit en modifiant par exemple l'état logique d'un point mémorisant. Nous nous intéressons à ce second type d'erreur.

Au laboratoire LIP6, plusieurs thèses ont déjà été menées sur l'analyse de diaphonie d'un point de vue temporel ou fonctionnel. Concernant l'analyse fonctionnelle, une méthode d'évaluation du bruit de diaphonie a été développée et implémentée dans un outil prototype (CRISE) qui ne prend pas en compte les résistances et capacités d'interconnexion.

Devant la complexité des phénomènes mis en jeu et l'importance du volume de données à prendre en compte l'intégration directe des éléments parasites dans les algorithmes de vérification ne paraît pas réaliste.

Nous avons choisi de développer une méthode de réduction de réseaux de résistances et de capacités. L'objectif de cette thèse est donc de déterminer quel schéma simplifié peut être associé à un fil d'interconnexion modélisé par un réseau de résistances et de capacités et comportant des couplages capacitifs avec d'autres signaux, puis de proposer une méthode pour déterminer les paramètres de ce schéma simplifié.

Dans les chapitres 4, 5 et 6 nous avons présenté une méthode de réduction. Celle-ci est composée de deux étapes : l'*analyse* et la *réduction*. La phase d'*analyse*, présentée au chapitre 4, peut être réalisée soit dans le domaine temporel avec la méthode directe, soit dans le domaine fréquentiel avec la méthode indirecte. Ces deux méthodes sont composées de deux phases principales : le calcul des constantes de temps suivi du calcul des coefficients. Pour la méthode directe, le calcul des constantes de temps est réalisé à partir des valeurs initiales et des dérivées successives aux différents nœuds du circuit, suivi de la diagonalisation d'une matrice et de

la recherche des racines d'un polynôme. Pour la méthode indirecte, nous construisons une matrice de polynômes qui caractérise le circuit. Puis, nous obtenons l'expression de la sortie en triangularisant la sortie. Enfin la recherche des racines d'un polynôme permet de déterminer les constantes de temps du réseau.

Dans le chapitre 5, nous avons présenté deux méthodes existantes de recherche de racines d'un polynôme et exposé la méthode que nous avons développée.

L'étape de *réduction* fournit un schéma simplifié du réseau initial à partir soit de l'expression temporelle obtenue lors de l'étape d'analyse soit d'une simulation électrique. Dans le chapitre 6, nous avons présenté le schéma simplifié et la méthode pour calculer ses paramètres.

Dans le chapitre 7, nous avons montré que cette méthode de réduction peut être intégrée à l'outil d'évaluation du bruit de diaphonie CRISE.

L'expérience montre que le schéma simplifié que nous proposons pour modéliser une ligne d'interconnexion est satisfaisant. Ce schéma permet de représenter séparément la constante de temps et le délai de la transition. De même, la modélisation de l'agresseur sous forme d'une source de courant réalise un compromis acceptable entre la précision et la complexité du modèle.

Cependant, l'étape d'analyse présente le défaut de nécessiter un temps de calcul important. Ceci est dû au choix que nous avons fait de calculer l'expression du nœud de sortie sans aucune approximation. Certes cette performance peut être améliorée en utilisant des techniques plus robustes de résolution d'équations matricielles. Une autre solution que nous avons expérimentée consiste à fractionner le réseau. Cette solution permet de réduire considérablement le temps de calcul au prix d'une légère augmentation de l'erreur.

Ces travaux peuvent être poursuivis sur trois axes.

Tout d'abord, nous allons intégrer cette méthode de réduction à l'outil d'évaluation du bruit de diaphonie CRISE. Cette intégration demande quelques modifications de l'outil CRISE aussi bien pour l'analyse des configurations d'agression qui doit prendre en compte le délai des interconnexions des agresseurs que pour le calcul du bruit de diaphonie.

Ensuite, il est nécessaire de développer un outil pour séparer les réseaux de résistances et de capacités du réseau de transistors.

CHAPITRE 9. CONCLUSION ET PERSPECTIVES

Pour finir, nous nous étions volontairement limité dans cette thèse à l'étude des réseaux ne comprenant que des résistances et des capacités. Avec l'évolution des technologies de fabrication, d'autres éléments parasites vont apparaître. Il s'agit des inductances de ligne et de couplage. L'intégration de ces inductances dans l'outil développé constitue un troisième axe pour les futures recherches dans le domaine de la vérification.

Annexe A

Modélisation des éléments parasites

L'article [Delorme96] exprime les capacités à la masse et de couplage pour deux conducteurs et un plan de masse (cf. figure A.1)

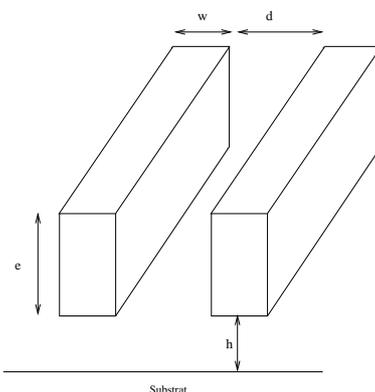


Figure A.1: Deux conducteurs et un plan de masse

La capacité à la masse par unité de longueur vaut :

$$C_m = \epsilon_0 \epsilon_r \left\{ 1, 106 \frac{w}{l} + 0, 79 \left(\frac{w}{h} \right)^{0,1} + 0, 59 \left(\frac{e}{h} \right)^{0,53} + \left[0, 52 \left(\frac{w}{h} \right)^{0,01} + 0, 46 \left(\frac{e}{h} \right)^{0,17} \right] \left[1 - 0, 87 e^{\left(\frac{-d}{h} \right)} \right] \right\} \quad (\text{A.1})$$

De même, la capacité de couplage par unité de longueur vaut :

$$C_d = \epsilon_0 \epsilon_r \left\{ \frac{e}{d} + 1, 2 \left(\frac{e}{h} \right)^{0,1} \cdot \left(\frac{d}{h} + 1, 154 \right)^{-2,22} + 0, 253 \ln \left(1 + 7, 17 \frac{w}{d} \right) \cdot \left(\frac{d}{h} + 0, 54 \right)^{-0,64} \right\} \quad (\text{A.2})$$

Pour la technologie 250nm, on a :

- w=250nm,

ANNEXE A. MODÉLISATION DES ÉLÉMENTS PARASITES

- $e=450\text{nm}$,
- $d=500\text{nm}$,
- $h=250\text{nm}$,

Nous obtenons alors une capacité de couplage linéique de 42fF et des capacités à la masse linéique de 126fF.

Pour la technologie 130nm , on a :

- $w=130\text{nm}$,
- $e=273\text{nm}$,
- $d=260\text{nm}$,
- $h=250\text{nm}$,

Ce qui nous donne une capacité de couplage linéique de 54fF et des capacités à la masse linéique de 92fF.

Annexe B

Coefficients du bruit sur une victime

Nous avons

$$V_{bruit} = \frac{V_{dd}}{b_2} (k_1 e^{s_1 t_{bruit}} + k_2 e^{s_2 t_{bruit}}) \quad (B.1)$$

avec

$$t_{bruit} = \frac{1}{s_2 - s_1} \ln\left(-\frac{k_1 s_1}{k_2 s_2}\right) \quad (B.2)$$

où

$$\begin{aligned} s_1 s_2 &= \frac{1}{b_2} \\ s_1 + s_2 &= -\frac{b_1}{b_2} \\ k_0 &= a_3 b_2 \\ k_1 &= -\frac{b_2(a_4 + s_2 b_2 a_3)}{2s_2 b_2 + b_1} \\ k_2 &= \frac{b_2(-s_2 b_2 a_3 - a_3 b_1 + a_4)}{2s_2 b_2 + b_1} \end{aligned} \quad (B.3)$$

$$a_3 = R_{d2} C_{C1} + R_{d2} C_{C2} + R'_1 C_{C2} \quad (B.4)$$

$$\begin{aligned} a_4 &= R_{d2} C'_1 R'_1 C_{C2} + R_{d2} C_{C1} R'_1 C_{C2} + R_{d2} C_{C1} R_1 C_2 \\ &+ R_{d2} C_{C1} R_1 C_{C2} \end{aligned} \quad (B.5)$$

$$\begin{aligned} b_1 &= R'_1 C_{C2} + R_{d2} C_{C2} + R_{d2} C_{C1} + R'_1 C'_2 + R_{d1} C_{C1} \\ &+ R_{d1} C_{C2} + R_1 C_{C2} + R_{d2} C'_1 + R_{d1} C_1 + R_{d2} C'_2 + R_1 C_2 + R_{d1} C_2 \end{aligned} \quad (B.6)$$

$$\begin{aligned}
 b_2 = & R_{d2}C'_1R'_1C_{C2} + R_{d2}C_{C1}R'_1C_{C2} + R_{d2}C_{C1}R_1C_{C2} + R_{d2}C_{C1}R_1C_2 \\
 & + R_{d1}C_2R'_1C_{C2} + R_{d1}C_2R_{d2}C'_1 + R_{d1}C_2R_{d2}C_{C1} + R_{d1}C_2R_{d2}C'_2 \\
 & + R_{d1}C_2R_{d2}C_{C2} + R_{d1}C_1R'_1C'_2 + R_{d1}C_1R'_1C'_{C2} + R_{d1}C_1R_{d2}C'_1 \\
 & + R_{d1}C_1R_{d2}C_{C1} + R_{d1}C_1R_{d2}C'_2 + R_{d1}C_1R_{d2}C_{C2} + R_{d2}C'_1R'_1C'_2 \\
 & + R_1C_2R'_1C'_2 + R_1C_2R'_1C_{C2} + R_1C_2R_{d2}C'_1 + R_{d2}C_{C1}R'_1C'_2 \\
 & + R_{d1}C_1R_1C_2 + R_{d1}C_1R_1C_{C2} + R_{d1}C_{C1}R_1C_2 + R_{d1}C_{C1}R_1C_{C2} \\
 & + R_{d1}C_{C1}R'_1C'_2 + R_{d1}C_{C1}R'_1C_{C2} + R_{d1}C_{C2}R'_1C'_2 + R_{d1}C_{C2}R_{D2}C'_1 \\
 & + R_{d1}C_{C2}R_{d2}C'_2 + R_{d1}C_{C1}R_{d2}C'_1 + R_{d1}C_{C1}R_{d2}C'_2 + R_1C_2R_{d2}C'_2 \\
 & + R_1C_2R_{d2}C_{C2} + R_1C_{C2}R'_1C'_2 + R_1C_{C2}R_{d2}C'_1 + R_1C_{C2}R_{d2}C'_2 + R_{d1}C_2R'_1C'_2
 \end{aligned} \tag{B.7}$$

Annexe C

Modèle de l'agresseur

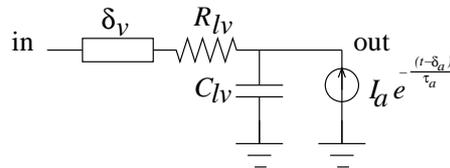


Figure C.1: Modèle de l'agresseur

Lorsque $t \leq \delta_a$, la source de courant ne débite pas encore de courant (cf. figure C.2). Par conséquent, $x_{out}(t) = 0$

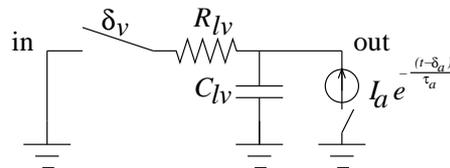


Figure C.2: Modèle de l'agresseur

Pour $\delta_a \leq t \leq \delta_a + \delta_v$, la source de courant débite un courant absorbé par la capacité C_{lv} (cf. figure C.2). La loi des nœuds en *out* donne

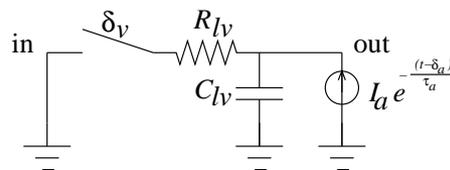


Figure C.3: Modèle de l'agresseur

$$C_{lv} \frac{dx_{out}(t)}{dt} = I_a \cdot e^{-\frac{t-\delta_a}{\tau_a}} \quad (C.1)$$

La forme de la tension du nœud *out* est

$$x_{out}(t) = -\frac{I_a \tau_a}{C_{lv}} \cdot e^{-\frac{t-\delta_a}{\tau_a}} + K_0 \quad (\text{C.2})$$

Comme $x_{out}(\delta_a) = 0$

$$x_{out}(t) = \frac{I_a \tau_a}{C_{lv}} \cdot (1 - e^{-\frac{t-\delta_a}{\tau_a}}) \quad (\text{C.3})$$

d'où la tension atteinte par *out* à l'instant $\delta_a + \delta_v$

$$x_{out}(\delta_a + \delta_v) = \frac{I_a \tau_a}{C_{lv}} \cdot (1 - e^{-\frac{\delta_v}{\tau_a}}) \quad (\text{C.4})$$

Lorsque $\delta_a + \delta_v \leq t$, le courant s'écoule à travers la résistance R_{lv} vers la masse (cf. figure C.4).

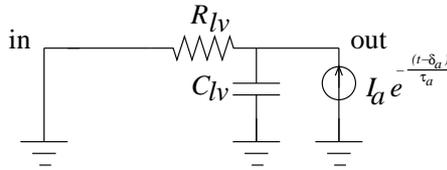


Figure C.4: Modèle de l'agresseur

La loi des nœuds en *out* donne

$$\frac{x_{out}(t)}{R_{lv}} + C_{lv} \frac{dx_{out}(t)}{dt} = I_a \cdot e^{-\frac{t-\delta_a}{\tau_a}} \quad (\text{C.5})$$

La solution est de forme

$$x_{out}(t) = K_1 \cdot e^{-\frac{t}{\tau_v}} + K_2 \cdot e^{-\frac{t-\delta_a}{\tau_a}} \quad (\text{C.6})$$

et

$$x'_{out}(t) = -\frac{K_1}{\tau_v} \cdot e^{-\frac{t}{\tau_v}} - \frac{K_2}{\tau_a} \cdot e^{-\frac{t-\delta_a}{\tau_a}} \quad (\text{C.7})$$

en remplaçant l'expression de x_{out} et de x'_{out} dans l'équation C.5, on obtient

$$\frac{K_1}{R_{lv}} \cdot e^{-\frac{t}{\tau_v}} + \frac{K_2}{R_{lv}} \cdot e^{-\frac{t-\delta_a}{\tau_a}} - \frac{C_{lv} K_1}{\tau_v} \cdot e^{-\frac{t}{\tau_v}} - \frac{C_{lv} K_2}{\tau_v} \cdot e^{-\frac{t-\delta_a}{\tau_a}} = I_a \cdot e^{-\frac{t-\delta_a}{\tau_a}} \quad (\text{C.8})$$

d'où

$$K_2 = I_a \frac{R_{lv} \tau_a}{\tau_a - \tau_v} \quad (\text{C.9})$$

Or, on a

$$\begin{aligned}x_{out}(\delta_a + \delta_v) &= \frac{I_a \tau_a}{C_{lv}} (1 - e^{-\frac{\delta_v}{\tau_a}}) \\ &= K_1 \cdot e^{-\frac{\delta_a + \delta_v}{\tau_v}} + I_a \frac{R_{lv} \tau_a}{\tau_a - \tau_v} \cdot e^{-\frac{\delta_v}{\tau_a}}\end{aligned}\tag{C.10}$$

d'où

$$\begin{aligned}K_1 &= \frac{I_a \tau_a}{C_{lv}} \left(1 - e^{-\frac{\delta_v}{\tau_a}} - \frac{\tau_v}{\tau_a - \tau_v} \cdot e^{-\frac{\delta_v}{\tau_a}}\right) \cdot e^{\frac{\delta_a + \delta_v}{\tau_v}} \\ &= \frac{I_a \tau_a}{C_{lv}} \left(1 - \frac{\tau_a}{\tau_a - \tau_v} \cdot e^{-\frac{\delta_v}{\tau_a}}\right) \cdot e^{\frac{\delta_a + \delta_v}{\tau_v}}\end{aligned}\tag{C.11}$$

soit

$$\begin{aligned}x_{out}(t) &= \frac{I_a \tau_a}{C_{lv}} \left(1 - \frac{\tau_a}{\tau_a - \tau_v} \cdot e^{-\frac{\delta_v}{\tau_a}}\right) \cdot e^{-\frac{t - (\delta_a + \delta_v)}{\tau_v}} + I_a \frac{R_{lv} \tau_a}{\tau_a - \tau_v} \cdot e^{-\frac{t - \delta_a}{\tau_a}} \\ &= \frac{I_a \tau_a}{C_{lv}} \left[\left(1 - \frac{\tau_a}{\tau_a - \tau_v} \cdot e^{-\frac{\delta_v}{\tau_a}}\right) \cdot e^{-\frac{t - (\delta_a + \delta_v)}{\tau_v}} + \frac{\tau_v}{\tau_a - \tau_v} \cdot e^{-\frac{t - \delta_a}{\tau_a}}\right]\end{aligned}\tag{C.12}$$

Annexe D

Détails des calculs pour déterminer les paramètres de la victime

On a

$$S = \int_0^{\delta_v} (f(t) - V_{DD})^2 . dt + \int_{\delta_v}^{+\infty} (f(t) - V_{DD} . e^{-\frac{t-\delta_v}{\tau_v}})^2 . dt \quad (\text{D.1})$$

avec $f(t) = \sum_{i=1}^n a_i e^{-h_i . t}$ et rappelons que $\sum_{i=1}^n a_i = V_{DD}$

Soit

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{\delta_v} f^2(t) . dt + \int_0^{\delta_v} V_{DD}^2 . dt - 2 . V_{DD} \int_0^{\delta_v} f(t) . dt \\ &+ \int_{\delta_v}^{+\infty} f^2(t) . dt + V_{DD}^2 \int_{\delta_v}^{+\infty} e^{-2\frac{t-\delta_v}{\tau_v}} . dt - 2 . V_{DD} \int_{\delta_v}^{+\infty} e^{-\frac{t-\delta_v}{\tau_v}} f(t) . dt \end{aligned} \quad (\text{D.2})$$

Soit $S = S_1 + S_2 + S_3 + S_4 + S_5$ avec

$$S_1 = \int_0^{+\infty} f^2(t) . dt$$

$$S_2 = \int_0^{\delta_v} V_{DD}^2 . dt$$

$$S_3 = -2 . V_{DD} \int_0^{\delta_v} f(t) . dt$$

$$S_4 = V_{DD}^2 \int_{\delta_v}^{+\infty} e^{-2\frac{t-\delta_v}{\tau_v}} . dt$$

$$S_5 = -2 . V_{DD} \int_{\delta_v}^{+\infty} e^{-\frac{t-\delta_v}{\tau_v}} f(t) . dt$$

ANNEXE D. DÉTAILS DES CALCULS POUR DÉTERMINER LES PARAMÈTRES DE LA VICTIME

Maintenant nous calculons S_1 à S_5 .

$$\begin{aligned}
 S_1 &= \int_0^{+\infty} \left(\sum_{i=1}^n a_i e^{-h_i \cdot t} \right)^2 \cdot dt \\
 &= \left[- \sum_{i=1}^n \frac{a_i^2}{2 \cdot h_i} e^{-2 \cdot h_i \cdot t} - \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{a_i a_j}{h_i + h_j} e^{-(h_i + h_j) \cdot t} \right]_0^{+\infty} \\
 &= \sum_{i=1}^n \frac{a_i^2}{2 \cdot h_i} + \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{a_i a_j}{h_i + h_j} \\
 S_2 &= [V_{DD}^2 \cdot t]_0^{\delta_v} \\
 &= V_{DD}^2 \cdot \delta_v \\
 S_3 &= \left[2 \cdot V_{DD} \sum_{i=1}^n \frac{a_i}{h_i} e^{-h_i \cdot t} \right]_0^{\delta_v} \\
 &= 2 \cdot V_{DD} \sum_{i=1}^n \frac{a_i}{h_i} e^{-h_i \cdot \delta_v} - 2 \cdot V_{DD} \sum_{i=1}^n \frac{a_i}{h_i} \\
 S_4 &= \left[- \frac{V_{DD}^2 \tau_v}{2} \cdot e^{-2 \frac{t - \delta_v}{\tau_v}} \right]_{\delta_v}^{+\infty} \\
 &= \frac{V_{DD}^2 \tau_v}{2} \\
 S_5 &= -2 \cdot V_{DD} \int \sum_{i=1}^n a_i e^{-\frac{(1+h_i \tau_v) \cdot t - \delta_v}{\tau_v}} dt \\
 &= \left[2 \cdot V_{DD} \sum_{i=1}^n \frac{a_i \cdot \tau_v}{1 + h_i \tau_v} e^{-\frac{(1+h_i \tau_v) \cdot t - \delta_v}{\tau_v}} \right]_{\delta_v}^{+\infty} \\
 &= -2 \cdot V_{DD} \sum_{i=1}^n \frac{a_i \cdot \tau_v}{1 + h_i \tau_v} e^{-\frac{h_i \tau_v \delta_v}{\tau_v}}
 \end{aligned} \tag{D.3}$$

Ce qui donne

$$S = \sum_{i=1}^n \frac{a_i^2}{2 h_i} + \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{a_i a_j}{h_i + h_j} + V_{DD}^2 \delta_v + 2 V_{DD} \sum_{i=1}^n \frac{a_i}{h_i (1 + h_i \tau_v)} e^{-h_i \delta_v} - 2 V_{DD} \sum_{i=1}^n \frac{a_i}{h_i} + \frac{V_{DD}^2 \tau_v}{2} \tag{D.4}$$

Annexe E

Détails des calculs pour déterminer les paramètres de l'agresseur

Pour déterminer le retard de l'agresseur, nous cherchons la valeur de δ_a qui minimise la distance entre l'expression exacte du nœud de sortie (f) et l'expression du modèle réduit (g).

$$S = \int_0^{+\infty} (f(t) - g(t))^2 . dt \quad (\text{E.1})$$

où

$$g(t) = \begin{cases} 0 & t \in [0, \delta_a] \\ \frac{I_a \tau_a}{C_{lv}} \cdot (1 - e^{-\frac{t-\delta_a}{\tau_a}}) & t \in [\delta_a, \delta_a + \delta_v] \\ \frac{I_a \tau_a}{C_{lv}} \left[\left(1 - \frac{\tau_a}{\tau_a - \tau_v}\right) \cdot e^{-\frac{\delta_v}{\tau_a}} \cdot e^{-\frac{t-(\delta_a+\delta_v)}{\tau_v}} + \frac{\tau_v}{\tau_a - \tau_v} \cdot e^{-\frac{t-\delta_a}{\tau_a}} \right] & t > \delta_a + \delta_v \end{cases} \quad (\text{E.2})$$

et

$$f(t) = \sum_{i=1}^n a_i \cdot e^{-h_i \cdot t} \quad (\text{E.3})$$

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{\delta_a} f^2(t) . dt + \int_{\delta_a}^{\delta_a+\delta_v} (f(t) - g_2(t))^2 . dt + \int_{\delta_a+\delta_v}^{+\infty} (f(t) - g_3(t))^2 . dt \\ &= \int_0^{\delta_a} f^2(t) . dt + \int_{\delta_a}^{\delta_a+\delta_v} g_2^2(t) . dt + \int_{\delta_a+\delta_v}^{+\infty} g_3^2(t) . dt \\ &\quad - 2 \int_{\delta_a}^{\delta_a+\delta_v} f(t) g_2(t) . dt - 2 \int_{\delta_a+\delta_v}^{+\infty} f(t) g_3(t) . dt \\ &= \int_0^{\delta_a} f^2(t) . dt + S_1 + S_2 + S_3 + S_4 \end{aligned} \quad (\text{E.4})$$

ANNEXE E. DÉTAILS DES CALCULS POUR DÉTERMINER LES PARAMÈTRES DE L'AGRESSEUR

Calcul de S_1

$$\begin{aligned}
 S_1 &= \frac{I_a^2 \tau_a^2}{C_{lv}^2} \int_{\delta_a}^{\delta_a + \delta_v} (1 - e^{-\frac{t - \delta_a}{\tau_a}})^2 . dt \\
 &= \frac{I_a^2 \tau_a^2}{C_{lv}^2} \int_{\delta_a}^{\delta_a + \delta_v} (1 + e^{-2\frac{t - \delta_a}{\tau_a}} - 2e^{-\frac{t - \delta_a}{\tau_a}}) . dt \\
 &= \frac{I_a^2 \tau_a^2}{C_{lv}^2} \left[t - \frac{\tau_a}{2} e^{-2\frac{t - \delta_a}{\tau_a}} + 2\tau_a e^{-\frac{t - \delta_a}{\tau_a}} \right]_{\delta_a}^{\delta_a + \delta_v} \\
 &= \frac{I_a^2 \tau_a^2}{C_{lv}^2} \left[\delta_v - \frac{\tau_a}{2} e^{-2\frac{\delta_v}{\tau_a}} + \frac{\tau_a}{2} + 2\tau_a e^{-\frac{\delta_v}{\tau_a}} - 2\tau_a \right]
 \end{aligned} \tag{E.5}$$

d'où

$$\frac{\partial S_1}{\partial \delta_a} = 0 \tag{E.6}$$

Calcul de S_2

$$\begin{aligned}
 S_2 &= \frac{I_a^2 \tau_a^2}{C_{lv}^2} \int_{\delta_a + \delta_v}^{+\infty} \left[\left(1 - \frac{\tau_a}{\tau_a - \tau_v} . e^{-\frac{\delta_v}{\tau_a}} \right) . e^{-\frac{t - (\delta_a + \delta_v)}{\tau_v}} + \frac{\tau_v}{\tau_a - \tau_v} . e^{-\frac{t - \delta_a}{\tau_a}} \right]^2 . dt \\
 &= \frac{I_a^2 \tau_a^2}{C_{lv}^2} \int_{\delta_a + \delta_v}^{+\infty} \left(\left(1 - \frac{\tau_a}{\tau_a - \tau_v} . e^{-\frac{\delta_v}{\tau_a}} \right)^2 . e^{-2\frac{t - (\delta_a + \delta_v)}{\tau_v}} + \frac{\tau_v^2}{(\tau_a - \tau_v)^2} . e^{-2\frac{t - \delta_a}{\tau_a}} \right. \\
 &\quad \left. + 2 \left(1 - \frac{\tau_a}{\tau_a - \tau_v} . e^{-\frac{\delta_v}{\tau_a}} \right) . e^{-\frac{t - (\delta_a + \delta_v)}{\tau_v}} \frac{\tau_v}{\tau_a - \tau_v} . e^{-\frac{t - \delta_a}{\tau_a}} \right) dt \\
 &= \frac{I_a^2 \tau_a^2}{C_{lv}^2} \int_{\delta_a + \delta_v}^{+\infty} \left(\left(1 - \frac{\tau_a}{\tau_a - \tau_v} . e^{-\frac{\delta_v}{\tau_a}} \right)^2 . e^{-2\frac{t - (\delta_a + \delta_v)}{\tau_v}} + \frac{\tau_v^2}{(\tau_a - \tau_v)^2} . e^{-2\frac{t - \delta_a}{\tau_a}} \right. \\
 &\quad \left. + 2 \left(1 - \frac{\tau_a}{\tau_a - \tau_v} . e^{-\frac{\delta_v}{\tau_a}} \right) . e^{-\frac{t(\tau_a + \tau_v) - \tau_a(\delta_a + \delta_v) - \delta_a \tau_v}{\tau_v \tau_a}} \frac{\tau_v}{\tau_a - \tau_v} \right) dt \\
 &= \frac{I_a^2 \tau_a^2}{C_{lv}^2} \left[-\frac{\tau_v}{2} \left(1 - \frac{\tau_a}{\tau_a - \tau_v} . e^{-\frac{\delta_v}{\tau_a}} \right)^2 . e^{-2\frac{t - (\delta_a + \delta_v)}{\tau_v}} - \frac{\tau_a}{2} \frac{\tau_v^2}{(\tau_a - \tau_v)^2} . e^{-2\frac{t - \delta_a}{\tau_a}} \right. \\
 &\quad \left. - 2 \frac{\tau_v \tau_a}{\tau_a + \tau_v} \left(1 - \frac{\tau_a}{\tau_a - \tau_v} . e^{-\frac{\delta_v}{\tau_a}} \right) . e^{-\frac{t(\tau_a + \tau_v) - \tau_a(\delta_a + \delta_v) - \delta_a \tau_v}{\tau_v \tau_a}} \frac{\tau_v}{\tau_a - \tau_v} \right]_{\delta_a + \delta_v}^{+\infty} \\
 &= \frac{I_a^2 \tau_a^2}{C_{lv}^2} \left(\frac{\tau_v}{2} \left(1 - \frac{\tau_a}{\tau_a - \tau_v} . e^{-\frac{\delta_v}{\tau_a}} \right)^2 + \frac{\tau_a}{2} \frac{\tau_v^2}{(\tau_a - \tau_v)^2} . e^{-2\frac{\delta_v}{\tau_a}} \right. \\
 &\quad \left. + 2 \frac{\tau_v \tau_a}{\tau_a + \tau_v} \left(1 - \frac{\tau_a}{\tau_a - \tau_v} . e^{-\frac{\delta_v}{\tau_a}} \right) . e^{-\frac{\delta_v}{\tau_a}} \frac{\tau_v}{\tau_a - \tau_v} \right)
 \end{aligned} \tag{E.7}$$

d'où

$$\frac{\partial S_2}{\partial \delta_a} = 0 \tag{E.8}$$

Calcul de S_3

$$\begin{aligned}
S_3 &= -2 \frac{I_a \tau_a}{C_{lv}} \int_{\delta_a}^{\delta_a + \delta_v} \sum_{i=1}^n a_i \cdot e^{-h_i \cdot t} (1 - e^{-\frac{t - \delta_a}{\tau_a}}) \cdot dt \\
&= -2 \frac{I_a \tau_a}{C_{lv}} \int_{\delta_a}^{\delta_a + \delta_v} \left(\sum_{i=1}^n a_i \cdot e^{-h_i \cdot t} - \sum_{i=1}^n a_i e^{-\frac{t(1+h_i \tau_a) - \delta_a}{\tau_a}} \right) \cdot dt \\
&= -2 \frac{I_a \tau_a}{C_{lv}} \left[- \sum_{i=1}^n \frac{a_i}{h_i} \cdot e^{-h_i \cdot t} + \sum_{i=1}^n \frac{a_i \tau_a}{1 + h_i \tau_a} e^{-\frac{t(1+h_i \tau_a) - \delta_a}{\tau_a}} \right]_{\delta_a}^{\delta_a + \delta_v} \\
&= -2 \frac{I_a \tau_a}{C_{lv}} \left(- \sum_{i=1}^n \frac{a_i}{h_i} \cdot e^{-h_i \cdot (\delta_a + \delta_v)} + \sum_{i=1}^n \frac{a_i \tau_a}{1 + h_i \tau_a} e^{-\frac{(\delta_a + \delta_v)(1+h_i \tau_a) - \delta_a}{\tau_a}} \right. \\
&\quad \left. + \sum_{i=1}^n \frac{a_i}{h_i} \cdot e^{-h_i \cdot \delta_a} - \sum_{i=1}^n \frac{a_i \tau_a}{1 + h_i \tau_a} e^{-\delta_a h_i} \right) \\
&= -2 \frac{I_a \tau_a}{C_{lv}} \left(- \sum_{i=1}^n \frac{a_i}{h_i} \cdot e^{-h_i \cdot (\delta_a + \delta_v)} + \sum_{i=1}^n \frac{a_i \tau_a}{1 + h_i \tau_a} e^{-(h_i(\delta_v + \delta_a) + \frac{\delta_v}{\tau_a})} \right. \\
&\quad \left. + \sum_{i=1}^n \frac{a_i}{h_i} \cdot e^{-h_i \cdot \delta_a} - \sum_{i=1}^n \frac{a_i \tau_a}{1 + h_i \tau_a} e^{-\delta_a h_i} \right) \\
&= -2 \frac{I_a \tau_a}{C_{lv}} \sum_{i=1}^n \frac{a_i}{h_i} e^{-h_i \delta_a} \left(1 - e^{-h_i \cdot \delta_v} - \frac{\tau_a}{1 + h_i \tau_a} (1 - e^{-h_i \cdot \delta_v + \frac{\delta_v}{\tau_a}}) \right)
\end{aligned} \tag{E.9}$$

d'où

$$\frac{\partial S_3}{\partial \delta_a} = 2 \frac{I_a \tau_a}{C_{lv}} \sum_{i=1}^n a_i e^{-h_i \delta_a} \left(1 - e^{-h_i \cdot \delta_v} - \frac{\tau_a}{1 + h_i \tau_a} (1 - e^{-h_i \cdot \delta_v + \frac{\delta_v}{\tau_a}}) \right) \tag{E.10}$$

ANNEXE E. DÉTAILS DES CALCULS POUR DÉTERMINER LES PARAMÈTRES DE L'AGRESSEUR

Calcul de S_4

$$\begin{aligned}
 S_4 &= -2 \frac{I_a \tau_a}{C_{lv}} \int_{\delta_a + \delta_v}^{+\infty} \sum_{i=1}^n a_i \cdot e^{-h_i \cdot t} \left[\left(1 - \frac{\tau_a}{\tau_a - \tau_v} \cdot e^{-\frac{\delta_v}{\tau_a}} \right) \cdot e^{-\frac{t - (\delta_a + \delta_v)}{\tau_v}} + \frac{\tau_v}{\tau_a - \tau_v} \cdot e^{-\frac{t - \delta_a}{\tau_a}} \right] \cdot dt \\
 &= -2 \frac{I_a \tau_a}{C_{lv}} \int_{\delta_a + \delta_v}^{+\infty} \sum_{i=1}^n a_i \left[\left(1 - \frac{\tau_a}{\tau_a - \tau_v} \cdot e^{-\frac{\delta_v}{\tau_a}} \right) \cdot e^{-\frac{t(1+h_i\tau_v) - (\delta_a + \delta_v)}{\tau_v}} + \frac{\tau_v}{\tau_a - \tau_v} \cdot e^{-\frac{t(1+h_i\tau_a) - \delta_a}{\tau_a}} \right] \cdot dt \\
 &= -2 \frac{I_a \tau_a}{C_{lv}} \left[\sum_{i=1}^n a_i \left[-\frac{\tau_v}{1+h_i\tau_v} \left(1 - \frac{\tau_a}{\tau_a - \tau_v} \cdot e^{-\frac{\delta_v}{\tau_a}} \right) \cdot e^{-\frac{t(1+h_i\tau_v) - (\delta_a + \delta_v)}{\tau_v}} \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - \frac{\tau_v}{\tau_a - \tau_v} \frac{\tau_a}{1+h_i\tau_a} \cdot e^{-\frac{t(1+h_i\tau_a) - \delta_a}{\tau_a}} \right] \right]_{\delta_a + \delta_v}^{+\infty} \\
 &= -2 \frac{I_a \tau_a}{C_{lv}} \left(\sum_{i=1}^n a_i \left[\frac{\tau_v}{1+h_i\tau_v} \left(1 - \frac{\tau_a}{\tau_a - \tau_v} \cdot e^{-\frac{\delta_v}{\tau_a}} \right) \cdot e^{-\frac{(\delta_a + \delta_v)(1+h_i\tau_v) - (\delta_a + \delta_v)}{\tau_v}} \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \frac{\tau_v}{\tau_a - \tau_v} \frac{\tau_a}{1+h_i\tau_a} \cdot e^{-\frac{(\delta_a + \delta_v)(1+h_i\tau_a) - \delta_a}{\tau_a}} \right] \right) \\
 &= -2 \frac{I_a \tau_a}{C_{lv}} \left(\sum_{i=1}^n a_i \left[\frac{\tau_v}{1+h_i\tau_v} \left(1 - \frac{\tau_a}{\tau_a - \tau_v} \cdot e^{-\frac{\delta_v}{\tau_a}} \right) \cdot e^{-(\delta_a + \delta_v)h_i} + \frac{\tau_v}{\tau_a - \tau_v} \frac{\tau_a}{1+h_i\tau_a} \cdot e^{-(\delta_a + \delta_v)h_i - \frac{\delta_v}{\tau_a}} \right] \right) \\
 &= -2 \frac{I_a \tau_a}{C_{lv}} \sum_{i=1}^n a_i \frac{\tau_v}{1+h_i\tau_v} \cdot e^{-(\delta_a + \delta_v)h_i} \left[1 - \frac{\tau_a h_i}{1+h_i\tau_a} \cdot e^{-\frac{\delta_v}{\tau_a}} \right]
 \end{aligned} \tag{E.11}$$

d'où

$$\frac{\partial S_4}{\partial \delta_a} = 2 \frac{I_a \tau_a}{C_{lv}} \left(\sum_{i=1}^n a_i \frac{\tau_v h_i}{1+h_i\tau_v} \cdot e^{-(\delta_a + \delta_v)h_i} \left[1 - \frac{\tau_a h_i}{1+h_i\tau_a} \cdot e^{-\frac{\delta_v}{\tau_a}} \right] \right) \tag{E.12}$$

d'où

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial S}{\partial \delta_a} &= 2 \frac{I_a \tau_a}{C_{lv}} \sum_{i=1}^n a_i e^{-h_i \delta_a} \left(1 - e^{-h_i \delta_v} - \frac{\tau_a}{1+h_i\tau_a} \left(1 - e^{-h_i \delta_v + \frac{\delta_v}{\tau_a}} \right) \right) \\
 &\quad + 2 \frac{I_a \tau_a}{C_{lv}} \sum_{i=1}^n a_i \frac{\tau_v h_i}{1+h_i\tau_v} \cdot e^{-(\delta_a + \delta_v)h_i} \left[1 - \frac{\tau_a h_i}{1+h_i\tau_a} \cdot e^{-\frac{\delta_v}{\tau_a}} \right]
 \end{aligned} \tag{E.13}$$

Annexe F

Détails des calculs pour intégration CRISE

Soit

$$\frac{dx_{out}^2}{dt^2} + \left(\frac{1}{C_v R_{lv}} + \frac{1}{\tau_v} + \frac{1}{\tau_{lv}} \right) \frac{dx_{out}}{dt} + \frac{1}{\tau_v \tau_{lv}} x_{out} = \sum_{i=1}^n I_{ai} e^{-\frac{t}{\tau_{ai}}} \left(\frac{1}{\tau_v C_{lv}} + \frac{1}{\tau_{lv} C_v} - \frac{R_{lv}}{\tau_{ai}} \right) \quad (F.1)$$

où $\tau_v = C_v R_v$ et $\tau_{lv} = C_{lv} R_{lv}$

La solution de cette équation différentielle est la somme de sa solution générale et de sa solution particulière.

Calculons la solution générale de cette équation différentielle d'ordre deux. Nous avons

$$\begin{aligned} \Delta &= \left(\frac{1}{C_v R_{lv}} + \frac{1}{\tau_v} + \frac{1}{\tau_{lv}} \right)^2 - \frac{4}{\tau_v \tau_{lv}} \\ &= \frac{1}{C_v^2 R_{lv}^2} + \frac{1}{\tau_v^2} + \frac{1}{\tau_{lv}^2} + 2 \frac{1}{C_v R_{lv} \tau_v} - 2 \frac{1}{\tau_v \tau_{lv}} + 2 \frac{1}{C_v R_{lv} \tau_{lv}} \\ &= \frac{1}{C_v^2 R_{lv}^2} + 2 \frac{1}{C_v R_{lv} \tau_v} + 2 \frac{1}{C_v R_{lv} \tau_{lv}} + \left(\frac{1}{\tau_v} - \frac{1}{\tau_{lv}} \right)^2 \end{aligned} \quad (F.2)$$

Comme $\Delta > 0$, la solution générale est de la forme

$$x_{out}(t) = K_1 \cdot e^{r_1 \cdot t} + K_2 \cdot e^{r_2 \cdot t} \quad (F.3)$$

où

$$\begin{aligned} r_1 &= \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{C_v R_{lv}} - \frac{1}{\tau_v} - \frac{1}{\tau_{lv}} - \sqrt{\Delta} \right) \\ r_2 &= \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{C_v R_{lv}} - \frac{1}{\tau_v} - \frac{1}{\tau_{lv}} + \sqrt{\Delta} \right) \end{aligned} \quad (\text{F.4})$$

La solution particulière de l'équation F.1 est de la forme

$$x_{out}(t) = \sum_{i=1}^n L_i e^{-\frac{t}{\tau_{ai}}} \quad (\text{F.5})$$

En injectant cette équation dans l'équation F.1, on obtient

$$\sum_{i=1}^n \frac{L_i}{\tau_{ai}^2} e^{-\frac{t}{\tau_{ai}}} - \left(\frac{1}{C_v R_{lv}} + \frac{1}{\tau_v} + \frac{1}{\tau_{lv}} \right) \sum_{i=1}^n \frac{L_i}{\tau_{ai}} e^{-\frac{t}{\tau_{ai}}} + \frac{1}{\tau_v \tau_{lv}} \sum_{i=1}^n L_i e^{-\frac{t}{\tau_{ai}}} = \sum_{i=1}^n I_{ai} e^{-\frac{t}{\tau_{ai}}} \left(\frac{1}{\tau_v C_{lv}} + \frac{1}{\tau_{lv} C_v} - \frac{R_{lv}}{\tau_{ai}} \right) \quad (\text{F.6})$$

Ce qui donne

$$\sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{\tau_{ai}^2} - \frac{1}{C_v R_{lv} \tau_{ai}} - \frac{1}{\tau_v \tau_{ai}} - \frac{1}{\tau_{lv} \tau_{ai}} + \frac{1}{\tau_v \tau_{lv}} \right) L_i e^{-\frac{t}{\tau_{ai}}} = \sum_{i=1}^n I_{ai} e^{-\frac{t}{\tau_{ai}}} \left(\frac{1}{\tau_v C_{lv}} + \frac{1}{\tau_{lv} C_v} - \frac{R_{lv}}{\tau_{ai}} \right) \quad (\text{F.7})$$

d'où pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$

$$L_i = I_{ai} \frac{\frac{1}{\tau_v C_{lv}} + \frac{1}{\tau_{lv} C_v} - \frac{R_{lv}}{\tau_{ai}}}{\frac{1}{\tau_{ai}^2} - \frac{1}{C_v R_{lv} \tau_{ai}} - \frac{1}{\tau_v \tau_{ai}} - \frac{1}{\tau_{lv} \tau_{ai}} + \frac{1}{\tau_v \tau_{lv}}} \quad (\text{F.8})$$

Finalement, l'équation du nœud *out* est

$$x_{out}(t) = K_1 \cdot e^{r_1 \cdot t} + K_2 \cdot e^{r_2 \cdot t} + \sum_{i=1}^n L_i e^{-\frac{t}{\tau_{ai}}} \quad (\text{F.9})$$

où seules les constantes K_1 et K_2 sont encore indéterminées.

Le système 7.1 permet d'obtenir l'équation du nœud 1

$$x_1 = K_1 (1 + r_1 C_{lv}) \cdot e^{r_1 \cdot t} + K_2 (1 + r_2 C_{lv}) \cdot e^{r_2 \cdot t} + \sum_{i=1}^n \left(L_i - \frac{L_i}{\tau_{ai}} - R_{lv} I_{ai} \right) e^{-\frac{t}{\tau_{ai}}} \quad (\text{F.10})$$

Nous savons que les conditions initiales des nœuds *out* et 1 valent 0 V. Nous pouvons donc, à partir du système 7.1, obtenir deux équations supplémentaires

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt}(0) &= 0 \\ C_{lv} \frac{dx_{out}}{dt}(0) &= \sum_{i=1}^n I_{ai} \cdot e^{-\frac{t}{\tau_{ai}}} \end{aligned} \quad (\text{F.11})$$

Ce qui donne

$$\begin{aligned} r_1 K_1 (1 + r_1 C_{lv}) + r_2 K_2 (1 + r_2 C_{lv}) - \sum_{i=1}^n \frac{1}{\tau_{ai}} (L_i - \frac{L_i}{\tau_{ai}} - R_{lv} I_{ai}) &= 0 \\ K_1 + K_2 + \sum_{i=1}^n L_i &= 0 \end{aligned} \tag{F.12}$$

Soit

$$\begin{aligned} K_1 &= - \frac{\sum_{i=1}^n \frac{1}{\tau_{ai}} (L_i - \frac{L_i}{\tau_{ai}} - R_{lv} I_{ai}) + r_2 (1 + r_2 C_{lv}) \sum_{i=1}^n L_i}{r_2 (1 + r_2 C_{lv}) - r_1 (1 + r_1 C_{lv})} \\ K_2 &= \frac{\sum_{i=1}^n \frac{1}{\tau_{ai}} (L_i - \frac{L_i}{\tau_{ai}} - R_{lv} I_{ai}) + r_1 (1 + r_1 C_{lv}) \sum_{i=1}^n L_i}{r_2 (1 + r_2 C_{lv}) - r_1 (1 + r_1 C_{lv})} \end{aligned} \tag{F.13}$$

Annexe G

Glossaire

Terme	Signification
arbre	Réseau ayant une entrée et plusieurs sorties sans aucune capacité de couplage.
AWE	Asymptotic Waveform Evaluation for Timing Analysis. Algorithme permettant d'obtenir une représentation en pôles et en zéro d'un réseau de résistances et de capacités.
capacité de couplage	Capacité parasite entre deux fils topologiquement proches.
capacité de diaphonie	Synonyme de capacité de couplage.
chaîne	Arbre ayant une seule sortie.
CMOS	Complementary Metal-Oxide Semiconductor. Technologie de porte utilisant des réseaux de transistors symétriques.
CRISE	CRosstalk RISk Evaluation tool. Outil d'évaluation du bruit de diaphonie développé au LIP6
diaphonie	Phénomène induit par les capacités de couplage.
DRC	Design Rule Checker. Outil de vérification des règles de dessin propre à chaque technologie de fabrication.
extraction	Action de déterminer les transistors, résistances et capacités représentant un circuit à partir de son dessin des masques.

GMP	GNU Multiple Precision Arithmetic Library. Library en langage C permettant de définir la taille de la mantisse des nombres flottants.
LIP6	Laboratoire d'Informatique de Paris 6
netlist	Liste des composants reliés (transistors ou portes) décrivant un circuit.
RC	Résistances et capacités. Ici, il s'agit de réseaux RC.
réseau	Ensemble de résistances, capacités à la masse et capacité de couplage pouvant avoir une entrée, plusieurs agresseurs et plusieurs sorties.
submicronique	De taille inférieure au micron. Ici, une technologie submicronique correspond aux technologies 0.35μ et 0.25μ . De même, fortement submicronique correspond aux technologies 0.18μ et en deçà.
TAS	Timing Analyser with Slope. Outil d'analyse temporelle ne prenant pas en compte les résistances et capacités d'interconnexion développé au LIP6.
VLSI	Very Large Scale Integration. Caractérise les circuits intégrés à très haute densité d'intégration.

Annexe H

Listes des publications

Titre	Using Symbolic Simulation to Exhibit Worst Case Crosstalk
Auteur	Bazargan-Sabet Pirouz, Renault Patricia
Conférence	4th IEEE Latin-American Test Workshop (LATW'03), Natal, Brazil
Date	Février 2003
Pages	264-268
Titre	An Event-Driven Approach to Crosstalk Noise Analysis
Auteur	Bazargan-Sabet Pirouz, Renault Patricia
Conférence	36th Annual Simulation Symposium (ANSS'36), Orlando, US
Date	March 2003
Pages	319-326
Titre	An analytical MOS Transistor Model Dedicated to Crosstalk Noise Evaluation
Auteur	Renault Patricia, Bazargan-Sabet Pirouz, Ilponse Fabrice
Conférence	6th WSEAS International Multiconference on Circuits Systems Communications and Computers (CSCC'2002), Rethymno, Crete, Grèce
Date	July 2002
Pages	12-17

ANNEXE H. LISTES DES PUBLICATIONS

Titre	A MoS Transistor Model for peak voltage calculation of crosstalk noise
Auteur	Le Dû Dominique, Renault Patricia, Bazargan-Sabet Pirouz
Conférence	ICECS, Dubrovnick, Croatie
Date	Septembre 2002
Pages	773
Titre	Conception d'un outil d'évaluation des bruits diaphoniques dans les circuits submicroniques
Auteur	Renault Patricia, Le Dû Dominique, Ilponse Fabrice, Bazargan Sabet Pirouz
Conférence	Vèmes Journées Nationales du Réseau Doctoral de Micro-électronique (JNRDM'2002), Grenoble, France
Date	avril 2002
Titre	Modèle du transistor MOS à canal court en vue de l'évaluation du bruit de diaphonie dans les circuits submicroniques
Auteur	Renault Patricia, Bazargan-Sabet Pirouz
Conférence	Troisième colloque du GDR CAO de circuits et systèmes intégrés, Paris, France
Date	Mai 2002
Pages	125-128
Titre	Modèle d'évaluation du bruit de diaphonie pour les technologies submicroniques
Auteur	Renault Patricia, Ilponse Fabrice, Bazargan Sabet Pirouz
Conférence	IVèmes Journées Nationales du Réseau Doctoral de Micro-électronique (JNRDM'2001), Strasbourg, France
Date	Avril 2001
Pages	188-189

Bibliographie

- [Abdallah98] N. Abdallah. *Méthode de simulation logico-temporelle de circuits numériques complexes prenant en compte le front des signaux et les collisions dans le cadre de la simulation mixte analogique-numérique*. Thèse de doctorat, Université Paris 6, 1998.
- [Avot03] G. Avot. *Analyse temporelle des circuits intégrés digitaux CMOS pour les technologies profondément submicroniques*. Thèse de doctorat, Université Paris 6, 2003.
- [Dartu97] F. Dartu et L. Pileggi. Calculating Worst-Case Gate Delays Due To Dominant Capacitance Coupling. *Proceedings of the DAC 1997*, 1997.
- [Delorme96] N. Delorme, M. Belleville et J. Chilo. Inductance and capacitance analytic formulas for VLSI interconnects. *Electronics letters*, vol. 32 : pages 996–997, May 1996.
- [Dioury98] K. Dioury. *Analyse temporelle hiérarchique des circuits VLSI à très haute densité d'intégration*. Thèse de doctorat, Université Paris 6, 1998.
- [Elmore48] W. C. Elmore. The transient response of damped linear networks with particular regard to wideband amplifiers. *Journal of applied physics*, vol. 19, January 1948.
- [GMP] GMP - GNU Multiple Precision Arithmetic Library. <http://www.swox.com/gmp/>.
- [Guardini98] C. Guardini, C. Forzan, B. Franzini et D. Pandini. Modeling the Effect of Wire Resistance in Deep Submicron Coupled Interconnects for Accurate Crosstalk based Net Sorting. *Proceedings of the PATMOS 1998*, 1998.
- [Hajjar92] A. Hajjar. *Modélisation des temps de propagation et analyse temporelle statique des circuits intégrés CMOS*. Thèse de doctorat, Université Paris 6, 1992.
- [Ilponse02] F. Ilponse. *Analyse du bruit dû aux couplages capacitifs dans les circuits intégrés numériques fortement submicroniques*. Thèse de doctorat, Université Paris 6, 2002.

BIBLIOGRAPHIE

- [Int00] Intel. *Moore's Law*, 2000.
- [Kahng99] A. B. Kahng, S. Muddu et D. Vidhani. Noise and delay uncertainty studies for coupled RC interconnects. Dans *Proceedings of the 12th annual International ASIC/SOC Conference*. 1999.
- [Kahng01] A. B. Kahng, S. Muddu et D. Vidhani. Noise model for multiple segmented coupled RC interconnects. Dans *Proceedings of the International Symposium on Quality Design*. 2001.
- [Lester99] A. Lester. *Abstraction Fonctionnelle des Circuits Numériques VLSI avec une méthode formelle basée sur une extraction de réseau de portes*. Thèse de doctorat, Université Paris 6, 1999.
- [Moore65] G. E. Moore. Cramming more components into integrated circuits. *Electronics*, vol. 38, April 1965.
- [Morton99] P. B. Morton et W. Dai. An Efficient Sequential Quadratic Programming Formulation of Optimal Wire Spacing for Crosstalk Noise Avoidance Routing. Dans *Proceedings of the ISPD*. 1999.
- [Pillage90] L. T. Pillage et R. A. Rohrer. Asymptotic Waveform Evaluation for Timing Analysis. *IEEE transactions on computer-aided design*, vol. 9 : pages 352–366, april 1990.
- [Rubinstein83] J. Rubinstein, P. Penfiels et mark A. Horowitz. Signal delay in RC Tree Networks. *IEEE transactions on computer-aided design*, vol. cad-2, July 1983.
- [Sem02] Semiconductor Industry Association. *International Technology Roadmap of Semiconductors*, 2002.
- [Stöhr99] T. Stöhr, M. Alt, A. Hetzel et J. Koehl. Analysis, Reduction and Avoidance of Crosstalk on VLSI Chips. *Proceedings of the ISPD 1998*, 1999.
- [Tutuianu96] B. Tutuianu, F. Dartu et L. Pileggi. An Explicit RC-Circuit Delay Approximation Based on the First Three Moments of the Impulse Response. *Proceedings of the DAC 1996*, 1996.
- [UMC] UMC. <http://www.umc.com>.